Pierre MATAGNE
(coordination)
Julie-Suzanne BAUSCH
Paul WEBER

COLLEGIUM LOGICUM

CLASSES DE Ire et 2^e



Remerciements

Nous tenons à remercier vivement toutes les personnes ayant contribué à la réalisation de ce manuel. Leurs relectures, leurs corrections et leurs suggestions ont été indispensables pour mener à bien le travail.

En particulier nous voudrions remercier les héritiers de notre défunt collègue Monsieur Ernest Weis qui nous ont autorisés à reprendre de larges extraits de son chapitre sur les paralogismes tiré de son excellente «Initiation à la logique moderne».

Roger Schmit et Norbert Campagna étaient des lecteurs méticuleux et des conseillers avertis.

Les élèves des classes de 1ère du Lycée Hubert Clément (année scolaire 2006-2007) ont non seulement servi de cobayes pour une première «ébauche» du manuel, mais ont débusqué maintes petites ou grandes erreurs dans les exercices.

Nos collègues, anciens ou actuels membres de la Commission nationale pour les programmes de philosophie ont pointé avec justesse les erreurs et maladresses qui subsistaient.

Les élèves et professeurs de l'année scolaire 2007 – 2008 ont peaufiné une version provisoire.

Nos familles ont accepté nos longues heures d'absence.

Merci à tous.

Les auteurs.

Auteurs: Pierre MATAGNE (coordination), Julie-Suzanne BAUSCH, Paul WEBER
Couverture: Jean Leyder «Miniature» 2007; rayons, encres et aquarelle; 210/145 mm
Illustration hibou: Jean Leyder
Mise en pages: Guig Jost

Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle, 2008
EP / ES / 332

Mein teurer Freund, ich rat Euch drum
Zuerst Collegium Logicum.
Da wird der Geist euch wohl dressiert,
In spanische Stiefeln eingeschnürt,
Daß er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn
Und nicht etwa, die Kreuz und Quer,
Irrlichtiere hin und her.

Goethe: Faust I [V. 1910 – 1917]

Avertissement

Le présent livre s'adresse aux élèves des classes terminales de l'enseignement secondaire luxembourgeois ayant au programme un cours de logique.

Il est donc calqué directement sur ce programme. Certaines de ses parties toutefois ne figurent pas au programme actuel des classes de première et pourront être traitées en classe de deuxième.

Ce livre ne constitue donc pas un manuel de logique au sens strict. Il ne présente pas une étude systématique de la logique ou de son histoire. Ce n'est pas un livre scientifique, mais un manuel d'école.

Il se limite à présenter d'une manière cohérente les différentes compétences que l'on demande aux élèves d'acquérir en vue de leur réussite aux épreuves de logique du baccalauréat.

C'est en ce sens que la partie théorique est limitée aux seuls aspects qui permettent de comprendre les méthodes mises en oeuvre et de saisir les relations entre elles. Le souci de la cohérence de la présentation, de l'écriture, de la démarche et des méthodes a été à la base de ce livre.

L'intention de ce livre est double: faire comprendre que des éléments apparemment disparates, sont en fait des manifestations différentes d'un même système (très simple) de logique, mais limiter aussi les exigences théoriques au strict minimum.

La partie pratique est en conséquence très développée. Elle comprend des explications sur les démarches et procédures à suivre, des exercices commentés, des applications et des résolutions d'exercices. L'élève pourra ainsi réviser et étudier de manière complémentaire et autonome la matière étudiée en classe.

Les applications sont les exercices ayant figuré dans les questionnaires d'examen depuis 1988. Ils permettent une appréciation correcte du degré de difficulté des épreuves de logique au cours des vingt dernières années. L'année et la session sont toujours précisées. Si pour certaines années ou sessions il n'y a pas d'exercice, c'est qu'aucune question de ce type n'avait été posée à l'examen.

Pour des raisons de cohérence de présentation ou de méthode, quelques légères adaptations ou corrections ont pu être faites par rapport aux exercices tels qu'ils ont été formulés à l'examen.

AVANT-PROPOS

Charles Sanders Peirce[1] a caractérisé la logique de la manière suivante:

> *"Nearly a hundred definitions of it have been given. It will, however, generally be conceded that its central problem is the classification of arguments, so that all those that are bad are thrown into one division, and those which are good into another..."*

Il s'agirait donc de distinguer les raisonnements corrects des raisonnements incorrects. Que signifie alors le terme «raisonnement»? Un raisonnement pourrait être défini comme un acte de pensée qui d'énoncés admis fait un passage à un ou plusieurs autres énoncés à admettre.

Le raisonnement est un acte banal, quotidien, mais sur le plan psychologique c'est un processus très complexe, hésitant, avec des retours en arrière et surtout des sauts, des imprécisions et beaucoup de non-dits.

Pensons à l'un des possibles raisonnements sous-jacents à l'acte d'aller en classe lorsque retentit le coup de sonnette à l'école:

> Quand j'entends le coup de sonnette et si je veux obéir au règlement,
> alors je vais en classe.
> J'entends un coup de sonnette.
> Je veux agir en conformité avec le règlement.
> Donc je rentre en classe.

… et il y a probablement d'autres prémisses non explicites qui finalement vont faire que je vais en classe. Ce processus psychologique n'intéresse pas en premier lieu la logique. Elle, pour sa part, s'interroge sur la validité du raisonnement terminé sans s'interroger comment ou pourquoi un tel a fait ce raisonnement.

Sa question est: est-ce que la conclusion tirée suit effectivement des prémisses données?

La logique dans son essence consiste donc dans l'analyse d'une part non négligeable de notre langage et de notre esprit pour en déterminer les formes de fonctionnement valides…

… et non pas à torturer cet esprit comme l'insinue Méphisto…

---

1 Charles Sanders Peirce (1839-1914), philosophe et logicien américain ayant contribué grandement aux progrès de la logique moderne.

Car il suffit d'avoir bien compris le mécanisme de la logique symbolique pour posséder un passe-temps non seulement passionnant et que l'on a toujours sous la main, mais également utile, réellement utile, dans tous les domaines. Grâce à elle, votre pensée deviendra nette et précise; vous pourrez comprendre clairement tout problème; vous vous habituerez à organiser vos idées avec méthode et d'une façon toujours accessible, et, par dessus tout, vous pourrez déceler tous les sophismes, réduire en poudre tous ces raisonnements spécieux et sans valeur que l'on rencontre si fréquemment dans les livres, dans les journaux, dans les discours et même dans les sermons, et qui trompent si facilement quiconque n'a pas pris la peine d'apprendre cet art passionnant. Faites un seul essai: c'est tout ce que je vous demande!

Lewis Carroll: Symbolic Logic

1.1 NOTIONS PREMIÈRES

1.1.1 Le langage

Comme tout raisonnement part de prémisses, donc d'expressions linguistiques, c'est-à-dire de structures construites du langage[2], il s'ensuit qu'il faudra d'abord cerner de quelles structures on partira dans le type de logique que nous allons mettre en place.

Analysons les expressions que nous pourrions produire dans le cadre de la langue française. Nous pouvons distinguer:

a) les expressions vides de sens: *oeroe gleu meu fleu*, car les expressions qu'elles contiennent n'ont pas de signification;
b) les suites de mots qui chacun pour soi ont une signification dans cette langue sans que la suite entière ait un sens: *rose la embêter lagon;*
c) les expressions qui, prises globalement, ont un sens: *l'acteur principal du film «Casablanca»*. Cette suite de mots a aussi une signification[3]. On dira qu'il s'agit d'une expression bien formée, d'un **énoncé**.
d) les énoncés impératifs ordonnant à quelqu'un de faire ou de ne pas faire telle ou telle chose: *Sois belle et tais-toi!*
e) les énoncés interrogatifs: *Fera-t-il beau?*
f) les énoncés normatifs [ils ressemblent à d), mais ne donnent pas d'ordre et énoncent seulement une norme à suivre]: *Il faut respecter la loi.*
g) les énoncés modaux: *Il est possible qu'il fasse beau*.

et enfin

h) les énoncés qui décrivent un **état de choses**: *Le ciel est gris*.
   Ce type d'énoncé possède une caractéristique que ne possèdent pas les énoncés précédents: il peut être vrai ou faux. Par rapport aux faits, si nous comparons les faits et l'énoncé, nous pouvons décider de manière certaine si l'énoncé est vrai ou non[4]. On appellera un tel énoncé une **proposition**.
i) les énoncés parlant d'autres énoncés: *il est vrai que le ciel est gris*.
   On parle d'un tel énoncé comme faisant partie d'un **métalangage**, la proposition «le ciel est gris» appartenant à la langue-objet.

---

[2] Il est entendu que le terme de langage s'applique aussi bien au langage écrit que parlé, qu'il soit naturel ou symbolique.
[3] "Here's looking at you kid"... = Humphrey Bogart!
[4] Cette certitude est loin de faire l'unanimité: il faudrait clarifier ce qu'est un fait, quand il y a correspondence entre fait et énoncé etc. La logique admet qu'il y a ainsi des énoncés décidables. Par ailleurs les énoncés normatifs et modaux admettent aussi des valeurs de vérité, mais ces valeurs dépendent fortement du système de référence dans lequel elles sont utilisées.

Problème: Un tel énoncé du métalangage est aussi susceptible d'être vrai ou faux, c'est donc une proposition. Or, de toute proposition du métalangage on peut à nouveau prétendre qu'elle est vraie ou fausse: on aura donc un méta-métalangage etc. De nombreux paradoxes reposent sur une confusion de la langue-objet avec la métalangue, par exemple celui du «Crétois Menteur»[5].

Les expressions linguistiques qui seront à la base de la logique que nous étudierons seront les **propositions**, donc des énoncés qui ont la propriété de pouvoir être vrais ou faux.

D'autres types de logique peuvent s'intéresser à d'autres types d'énoncés. Ainsi les logiques déontiques et les logiques modales s'intéressent aux raisonnements à partir d'énoncés normatifs respectivement modaux.

1.1.2 Le raisonnement

Si la logique consiste à vérifier si une conclusion est bien reliée aux prémisses, alors il faut s'interroger sur ce qu'est un raisonnement. Fondamentalement c'est l'acte de tirer une proposition nouvelle d'une ou plusieurs propositions déjà admises.

1.1.2.1 PRÉMISSES ET CONCLUSION

Ces deux termes désignent deux parties différentes présentes dans la grande majorité des raisonnements. Il y a des exceptions possibles[6].

Exemple 1
(1) S'il pleut, alors le ciel est gris.
(2) Il pleut.
(3) Donc le ciel est gris.

(1) et (2) sont appelées les prémisses (latin: praemissa = ce qui est envoyé vers l'avant = ce qui est admis comme étant vrai [= vorausgeschickt]). Ce sont évidemment des propositions qui peuvent être vraies ou fausses. Il est tout aussi évident que pour faire un raisonnement qui aboutisse à une conclusion vraie, il faudra partir de prémisses vraies. Comme très souvent nous ne serons pas en mesure de vérifier si tel est le cas, on admettra *par définition* qu'il en est ainsi.

(3) est appelée la conclusion. C'est ce qui peut être déduit des prémisses. On admettra qu'une telle déduction peut être faite correctement (selon les règles admises) ou non.

[5] cf chapitre 1.2.3.2
[6] cf chapitre 2.5.2.3 exercice commenté N° 2

1.1.2.2 VALIDITÉ

C'est une notion centrale pour la compréhension de ce que veut faire le logicien. Si une conclusion est déduite correctement, on dira qu'elle est valide de même que le raisonnement dans sa totalité.

Revenons sur l'exemple 1 ci-dessus. Cette suite de propositions est un raisonnement valide (correctement construit dans sa forme) et aboutissant à une conclusion vraie.

Ceci est dû:

- à la vérité des prémisses
- à la validité des déductions (opérations logiques qui consistent à relier des propositions de manière à avoir d'autres propositions)

Exemple 2

(1) Si les truites sont des mammifères, alors elles ont des ailes.
(2) Les truites sont des mammifères.
(3) Donc les truites ont des ailes.

Ce raisonnement est valide, car si ses prémisses étaient vraies, alors cette conclusion serait vraie aussi, car formellement le raisonnement est correct (la déduction est faite correctement).

En fait, si nous comparons bien les deux exemples 1 et 2, nous constatons que leur structure est la même:
(1) Si A est, alors B est.
(2) A est.
(3) Donc B est.

Exemple 3

(1) Si je suis président des USA, alors je suis célèbre.
(2) Je ne suis pas président des USA.
(3) Donc je ne suis pas célèbre.

Les prémisses sont vraies, la conclusion en tant que proposition aussi[7], mais le raisonnement n'est pas valide, la conclusion ne se déduit pas des prémisses.

Car formellement ce raisonnement est équivalent au raisonnement suivant:
(1) Si Elton John est président des USA, alors il est célèbre.
(2) Elton John n'est pas président des USA.
(3) Donc Elton John n'est pas célèbre.

---

[7] … du moins nous nous permettrons de le supposer pour les lecteurs de ces lignes …

La structure logique est en effet dans les deux cas:
(1) Si A est, alors B est.
(2) A n'est pas.
(3) Donc B n'est pas.

Nous retiendrons:
- Un raisonnement est **valide** si la déduction est faite correctement, si donc la conclusion peut être tirée des prémisses données (exemples 1 et 2).
- Un raisonnement aboutit à une conclusion **vraie**, si *à la fois* la déduction est valide et que les prémisses sont effectivement vraies (exemple 1 à condition que les prémisses soient vérifiées!). Dans ce cas la validité du raisonnement garantit le transfert de la vérité des prémisses à la conclusion.

Le travail du logicien consiste à s'intéresser à *l'aspect formel* de la déduction. Il n'est pas de son ressort de déterminer si les prémisses sont vraies ou non. Ceci est du ressort de chacun d'entre nous, des scientifiques, des philosophes etc.

On donnera dans ce manuel deux approches pour vérifier la validité d'un raisonnement. On pourra le faire:
- en vérifiant directement par la méthode des arbres[8] si la vérité (admise par principe!) des prémisses se transmet effectivement à la conclusion;
- en reconstituant la déduction[9] qui mène des prémisses à la conclusion.

1.1.3 Les systèmes logiques

La logique dont nous traitons ici se situe dans une certaine perspective en ce qui concerne le vrai et le faux. Elle admet qu'une proposition est *soit vraie, soit fausse, une troisième possibilité (l'indécision) étant exclue*. Il s'agit ici d'un des trois principes logiques admis par Aristote qui sont:
- **principe d'identité** affirmant qu'une proposition est équivalente à elle-même [plus tard nous noterons: $p \leftrightarrow p$];
- **principe de non-contradiction** qui pose qu'une proposition ne peut pas être vraie et fausse à la fois. [nous noterons: $\overline{p \wedge \bar{p}}$];
- **principe du tiers exclu** qui veut qu'une proposition est soit vraie, soit fausse [ce qui s'écrira: $p \; w \; \bar{p}$][10].

Les deux premiers principes posent qu'une proposition étant ce qu'elle est, a sa valeur unique. Ces deux principes ne semblent pas pouvoir être mis en cause, car un système de logique qui permettrait de démontrer qu'une même

8 cf chapitre 2.4
9 cf chapitre 2.5
10 Il s'agit ici du «ou exclusif» cf 1.3.2.3.1

proposition est à la fois vraie et fausse, permettrait en fait de démontrer n'importe quoi et serait tout simplement sans objet, la logique ayant précisément comme visée de distinguer les raisonnements corrects des raisonnements incorrects.

Il est par contre possible de concevoir d'autres logiques (et des travaux en ce sens ont été faits) pour lesquels le principe du tiers exclu ne serait pas valable. Ainsi on peut concevoir des systèmes logiques avec une troisième valeur «ni vrai, ni faux» ou même avec des valeurs multiples[11]. L'essentiel est que ces systèmes soient consistants, donc non-contradictoires.

C'est par parti pris, que nous utilisons ici une logique à deux valeurs. Nous limitons, non pas arbitrairement, mais sciemment le champ des valeurs d'une proposition. Remarquons justement combien de fois dans la vie courante nous sommes dans l'incapacité de préciser si une proposition est vraie ou fausse (à l'affirmation «Il y aura une bataille navale demain» nous répondrions probablement «Ah! je ne sais pas encore…»). Une logique voulant rendre compte de manière très exacte de nos raisonnements au quotidien ne pourrait se satisfaire de cette simple bivalence que nous admettrons pour plus de simplicité!

Ces analyses de la pensée logique «de tous les jours» relèvent aussi de la psychologie et constituent un champ de recherche important. Ainsi la pensée logique peut être étudiée dans son évolution à partir de la première enfance jusqu'à l'âge adulte[12].

A côté de cette indécision épistémologique on peut signaler aussi l'indétermination ontologique que la physique moderne a révélée. Ainsi le principe d'indétermination de Heisenberg énonce que - de façon assez contre-intuitive du point de vue de la mécanique classique - pour une particule massive donnée, on ne peut pas connaître simultanément sa position et sa vitesse; on ne peut donc pas décider clairement par oui ou par non et en même temps ces deux grandeurs en physique quantique.

Là aussi, un système logique du type que nous mettons en place ici, n'aurait pas prise!

---

[11] ... dites logiques polyvalentes.

[12] cf par exemple Jean PIAGET (avec B. Inhelder), *La genèse des structures logiques élémentaires*, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1959.

1.1.4 Logique des propositions / Logique des prédicats

Prenons le raisonnement suivant:
(1) Si tous les hommes sont mortels, alors Socrate est mortel.
(2) Tous les hommes sont mortels.
(3) Donc Socrate est mortel.

La structure de ce raisonnement peut être rendue par:
(1) Si A est, alors B est.
(2) A est.
(3) Donc B est.

Nous avons fait correspondre à chaque proposition élémentaire une lettre majuscule et nous pouvons constater que cette symbolisation est adéquate pour rendre compte de la validité du raisonnement.

Mais la première prémisse de ce raisonnement peut aussi être comprise comme *expression simplifiée* du raisonnement suivant[13]:
(1) Tous les hommes sont mortels.
(2) Socrate est un homme.
(3) Donc Socrate est mortel.

Si nous essayons de rendre compte de la structure du raisonnement par les moyens utilisés jusqu'ici, nous aurons:
(1) A est.
(2) B est.
(3) Donc C est.

Ceci n'est pas très convaincant, car rien ne nous permet de vérifier la validité de ce raisonnement, à savoir si C peut effectivement être déduit de A et de B. Il est impossible de le symboliser avec les moyens de la logique des propositions, car la conclusion dépend de l'analyse du sens de chaque proposition. Nous voyons que si nous voulons rendre compte d'un tel raisonnement, **il nous faut tenir compte de la structure interne des propositions** qui le constituent.

Nous trouvons alors la structure suivante:
(1) Tous les A sont B
(2) s est A
(3) Donc s est B

Nous distinguerons donc dans la suite du cours entre la *logique des propositions* et la *logique des prédicats*.

---

[13] Cet exemple archi-célèbre a été imaginé par Guillaume d'Occam (1285 – 1347). cf. BLANCHE p.153

La logique des propositions peut, pour vérifier la validité d'un raisonnement, faire abstraction de la structure interne des propositions élémentaires.

La logique des prédicats sert à vérifier la validité des raisonnements où la structure interne des propositions élémentaires doit être analysée en termes de sujet et prédicat, pour pouvoir décider de ladite validité.



1.2 ELEMENTS DE LOGIQUE CLASSIQUE

1.2.1 La Syllogistique

L'étude des raisonnements de forme syllogistique (SY) remonte à Aristote, fondateur de la logique. Aristote et les logiciens scolastiques se sont très peu préoccupés de ce que nous appelons la logique des propositions, mais ils ont fourni une théorie très élaborée des raisonnements dont les prémisses et la conclusion sont de structure prédicative, c'est-à-dire des syllogismes.

1.2.1.1 PRÉLIMINAIRES

1.2.1.1.1 Structure prédicative

Les propositions utilisées en syllogistique peuvent être analysées en sujet, prédicat et copule: S est (ou a) P

Exemple: Tous les hommes sont mortels.

Sujet (hommes) copule (sont) prédicat (mortels)

S = «ce dont on dit (prédique) quelque chose»
P = «ce qui est dit (prédiqué) de quelque (autre) chose»

1.2.1.1.2 Les quatre types de propositions

La structure prédicative permet de distinguer quatre possibilités de propositions. En effet, on peut opérer deux distinctions:

- entre propositions affirmatives et négatives
- entre propositions universelles (générales) et existentielles (particulières)

Ces deux distinctions nous donnent les quatre types suivants:

- type A: proposition universelle affirmative: Tous …
- type E: proposition universelle négative: Aucun …
- type I: proposition particulière affirmative: Quelques, certains …
- type O: proposition particulière négative: Quelques … ne … pas …

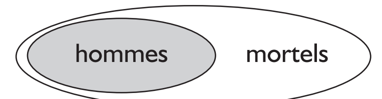
Les distinctions A, E, I, O sont dérivées des mots latins «**a**ff**i**rmo» (j'affirme) et «n**e**g**o**» (je nie).

On appelle proposition singulière une proposition à sujet concret: Noms propres («Socrate», «César»); termes désignés (par «ce», «ces», «ceci», «cela», «celui-ci», «celui-là»); pronoms personnels («je», «tu» etc.); termes désignant un objet unique («le pape», «l'auteur du Rénert» etc.). Les propositions singulières sont assimilées aux universelles (A et E).

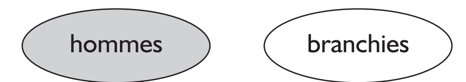
1.2.1.1.3 L'extension du sujet et du prédicat

Suivant les quatre types de propositions, les sujets et les prédicats ont des extensions différentes, c'est-à-dire qu'ils s'appliquent à des ensembles plus ou moins grand d'êtres.

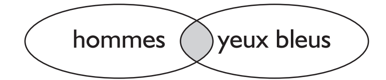
Exemples :
«Tous les hommes sont mortels» signifie que «la **totalité** des hommes représente une **partie** des êtres mortels».



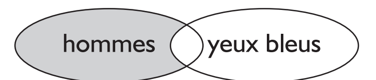
«Aucun homme n'a de branchies» signifie que «la **totalité** des hommes ne fait pas partie de la **totalité** des êtres ayant des branchies».



«Quelques hommes ont les yeux bleus» signifie «Une **partie** des hommes correspond à une **partie** des êtres aux yeux bleus».



«Quelques hommes n'ont pas les yeux bleus» signifie «Une **partie** des hommes ne fait pas partie de la totalité des êtres aux yeux bleus».



D'une manière générale on a: le sujet est pris universellement, c'est-à-dire dans toute son extension, s'il est universel, collectif ou singulier (tout homme, les hommes de cette ville, Socrate). Le prédicat est pris universellement dans les propositions négatives[14].

Tableau des extensions:

	A	E	I	O
Sujet	universel	universel	particulier	particulier
Prédicat	particulier	universel	particulier	universel

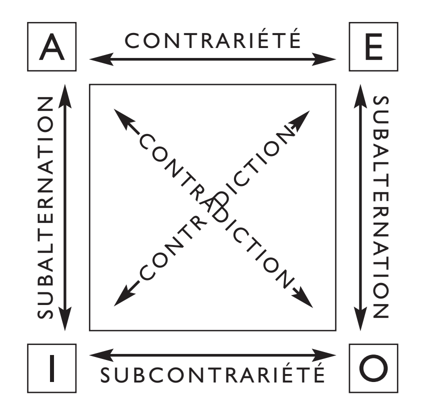
[14] Le prédicat peut être pris universellement dans une proposition affirmative. Cela arrive, chaque fois que la proposition est réciproque, comme dans les définitions ou jugements d'identité, p.ex. «François - Marie Arouet est Voltaire.»

1.2.1.1.4 Le carré logique et les propositions opposées

Depuis Apulée (2ème siècle après JC) les logiciens emploient les concepts de «quantité» de la proposition (universelle ou existentielle) et de «qualité» de la proposition (affirmative ou négative).

Ce même Apulée a introduit, dans un but pédagogique et mnémotechnique, le «carré logique» qui permet de mémoriser les relations entre les quatre types de propositions opposées qu'on peut distinguer:
contradiction; contrariété; subcontrariété; subalternation.

Définition des propositions opposées:
Deux propositions sont dites opposées quand elles diffèrent tout en ayant même sujet et même prédicat.



Contradictoires
Elles diffèrent en quantité et en qualité. A et O sont contradictoires, E et I sont contradictoires.

Exemple pour A et O: Tout exemple est bon à suivre.
Quelque exemple (au moins) n'est pas bon à suivre.

Exemple pour E et I: Aucun mammifère ne vole.
Quelques mammifères volent.

Subalternes
Elles diffèrent seulement en quantité.
A est la subalternante de la subalternée I.
E est la subalternante de la subalternée 0.

Exemple pour A et I:	Tout exemple est bon à suivre.
	Quelques exemples sont bons à suivre.
Exemple pour E et O:	Nul mammifère ne vole.
	Quelques mammifères ne volent pas.

Contraires et subcontraires
Elles diffèrent seulement en qualité.
A et E sont contraires. I et O sont subcontraires.

Exemple pour A et E:	Tout exemple est bon à suivre.
	Aucun exemple n'est bon à suivre.
Exemple pour I et O:	Quelques exemples sont bons à suivre.
	Quelques exemples ne sont pas bons à suivre.

On peut établir des règles qui permettent, connaissant la vérité ou la fausseté d'une proposition, de conclure à la vérité ou à la fausseté de la proposition opposée.

1.2.1.1.5 Les règles du carré logique (règles des opposées)

Règle des contradictoires
Les contradictoires ne peuvent être ni vraies toutes les deux, ni fausses toutes les deux.
De la vérité de l'une on conclut à la fausseté de l'autre et de la fausseté de l'une on conclut à la vérité de l'autre.

Règle des subalternes [15]
Quand l'universelle est vraie, la particulière l'est aussi. Quand la particulière est fausse, l'universelle l'est aussi.
Mais: Si la particulière est vraie, ou l'universelle fausse, on ne peut rien conclure.

Règle des contraires
Deux propositions contraires ne peuvent pas être vraies simultanément, mais elles peuvent être fausses toutes les deux.
De la vérité de l'une on conclut à la fausseté de l'autre, mais de la fausseté de l'une on ne peut pas conclure.

---

[15] L'inférence de l'universelle «Tous les hommes sont mortels» à «Quelques hommes sont mortels» qui est valide dans le carré logique (subalternation) ne l'est plus dans la logique des prédicats parce que l'universelle n'y affirme pas l'existence d'individus. L'universelle y a une signification hypothétique et non pas existentielle (voir 1.4.2.3). De $(\forall x)\ [Ax \rightarrow Bx]$ nous ne pouvons pas déduire $(\exists x)\ [Ax \wedge Bx]$. La logique des prédicats raisonne également sur des ensembles vides, ce qui n'est pas le cas de la logique traditionnelle.

Règle des subcontraires
Deux subcontraires peuvent être vraies toutes les deux, mais elles ne peuvent pas être fausses en même temps.
De la fausseté de l'une on conclut à la vérité de l'autre, mais la vérité de l'une ne permet pas de conclure.

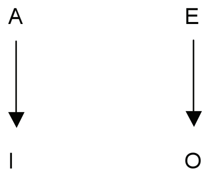
1.2.1.1.6 Inférences immédiates (propositions à même sujet et prédicat)

L'inférence immédiate est un raisonnement partant d'une seule donnée prédicative et menant à une autre proposition prédicative. Une inférence immédiate est bien un raisonnement, mais les Anciens lui refusaient généralement ce nom.

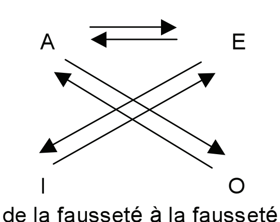
Les principales inférences immédiates sont la contradiction, la contrariété, la sub-contrariété et la subalternation.

Le carré logique et les règles qui s'y rapportent permettent des inférences immédiates menant à une proposition prédicative qui a même sujet et même prédicat que la donnée. On peut résumer les schémas de ces inférences dans les tableaux suivants:

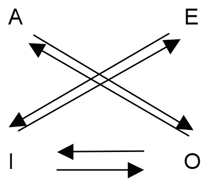
de la vérité à la vérité



de la vérité à la fausseté



de la fausseté à la vérité



de la fausseté à la fausseté



Exercice: Trouver la valeur de vérité des opposées (si les règles du carré logique et les schémas d'inférence le permettent)[16].

Si A = 1, alors E = I = O =	Si A = 0, alors E = I = O =
Si E = 1, alors A = I = O =	Si E = 0, alors A = I = O =
Si I = 1, alors A = E = O =	Si I = 0, alors A = E = O =
Si O = 1, alors A = E = I =	Si O = 0, alors A = E = I =

1.2.1.1.7 Inférences immédiates (propositions à sujet et prédicat différent)

D'autres inférences immédiates permettent de formuler, à partir d'une donnée prédicative, une proposition qui n'a pas même sujet et même prédicat. Ce sont la conversion, l'obversion et la contraposition.

Conversion

La proposition nouvelle a pour sujet le prédicat de la donnée et pour prédicat le sujet de la donnée.

Lorsque cette opération peut être faite sans rien changer à la quantité de la donnée, on l'appelle conversion simple. Si la quantité change, on parle de conversion par accident.

La conversion simple (sans changement de quantité)
est possible pour E et pour I:

Exemple pour E: [E] Aucun homme n'est parfait.
donc: [E] Aucun être parfait n'est homme.

Exemple pour I: [I] Quelques Luxembourgeois sont des Eschois.
donc: [I] Quelques Eschois sont des Luxembourgeois.

16 Avec 1 = vrai et 0 = faux.

La conversion par accident (avec changement de quantité)
est possible pour A et E:

Exemple pour A: [A] Toutes les maladies sont pénibles.
donc: [I] Quelques choses pénibles sont des maladies.

Exemple pour E: [E] Nul homme n'est parfait.
donc: [O] Quelques êtres parfaits ne sont pas des hommes.

Remarques
- Ce dernier cas est inutile. Cf. conversion simple de E.
- Une O ne se laisse jamais convertir!

Obversion
La proposition change de qualité, c'est-à-dire le prédicat est nié.
L'obversion est possible pour tous les types de proposition :
Exemple: [I] Quelques digressions dont utiles.
donc: [O] Quelques digressions ne sont pas inutiles.

Contraposition
Sujet et prédicat sont niés et permutés.
La contraposition simple est possible pour A et O:
Exemple pour A: [A] Tous les carrés sont des parallélogrammes.
donc: [A] Tous les non - parallélogrammes sont des non - carrés.

Exemple pour O: [O] Quelques polygones ne sont pas rectangles.
donc: [O] Quelques figures non - rectangles ne sont pas des non - polygones (= sont polygones).

La contraposition par accident[17](avec changement de qualité)
est possible pour E:
Exemple pour E: [E] Aucun animal n'est responsable de ses actes.
donc: [O] Au moins quelques non-responsables de leurs actes sont des animaux.

1.2.1.2 SYLLOGISME CATÉGORIQUE

1.2.1.2.1 Définitions

Le syllogisme catégorique est une déduction formée de trois propositions prédicatives. Les deux premières, appelées prémisses, étant admises, la troisième, appelée conclusion, en résulte nécessairement.

---

[17] Cette contraposition n'est plus valide en logique des prédicats. [E] s'écrit $(\forall x)[Ax \rightarrow \overline{Bx}] \Leftrightarrow \overline{(\exists x)[Ax \wedge Bx]}$, et [O] s'écrit $(\exists x)[Ax \wedge \overline{Bx}]$. On voit que $(\exists x)[Ax \wedge \overline{Bx}]$ ne peut pas être déduit de $(\exists x)[Ax \wedge Bx]$.

Exemple:

[A] Tous les hommes sont mortels.
[A] Tous les Luxembourgeois sont des hommes.
donc: [A] Tous les Luxembourgeois sont mortels.

On appellera :

petit terme	le sujet de la conclusion;
grand terme	le prédicat de la conclusion;
moyen terme	le terme qui est dans les deux prémisses, mais non dans la conclusion;
majeure	la prémisse qui contient le grand terme (terme majeur), on la met habituellement comme première prémisse;
mineure	la prémisse qui contient le petit terme (terme mineur), on la met comme deuxième prémisse.

1.2.1.2.2 Règles du syllogisme

1) Tout syllogisme a exactement trois termes: moyen terme, grand terme, petit terme. *[Terminus esto triplex, medius, maiorque, minorque.]*
2) La conclusion ne doit jamais contenir le moyen terme. *[Nequaquam medium capiat conclusio fas est.]*
3) Aucun terme ne doit avoir plus d'extension dans la conclusion que dans les prémisses. *[Latius hos quam praemissae conclusio non vult.]*[18]
4) Le moyen terme doit être pris au moins une fois universellement. (A déterminer à l'aide du tableau des extensions). *[Aut semel aut iterum medius generaliter esto.]*
5) Deux prémisses affirmatives ne peuvent pas donner une conclusion négative. *[Ambae affirmantes nequeunt generare negantem.]*
6) De deux prémisses négatives on ne peut rien conclure. *[Utraque si praemissa neget, nihil inde sequetur.]*
7) Deux propositions particulières ne permettent pas de conclure. *[Nil sequitur geminis ex particularibus umquam.]*
8) La conclusion suit la prémisse la plus faible: elle est négative, si une prémisse est négative, particulière si une prémisse est particulière. *[Peiorem semper sequitur conclusio partem.]*

Remarque: Les 4 premières règles concernent les trois termes du syllogisme, les 4 dernières la conclusion.

1.2.1.2.3 Modes du syllogisme

On désigne par modes du syllogisme les formes qu'il peut prendre selon la qualité et la quantité des trois propositions qui le composent. Le nombre des arrangements trois à trois des quatre lettres A E I O est de $4^3 = 64$. Mais tous les modes ne sont pas concluants. Il faut éliminer ceux qui sont contraires aux règles énumérées plus haut.

---

[18] cf. 1.2.1.1.3

Tableau des modes mathématiquement possibles:

1. AA	A	5. EA	A	9. IA	A	13. OA	A
	E		E		E		E
	I		I		I		I
	O		O		O		O
2. AE	A	6. EE	A	10. IE	A	14. OE	A
	E		E		E		E
	I		I		I		I
	O		O		O		O
3. AI	A	7. EI	A	11. II	A	15. OI	A
	E		E		E		E
	I		I		I		I
	O		O		O		O
4. AO	A	8. EO	A	12. IO	A	16. OO	A
	E		E		E		E
	I		I		I		I
	O		O		O		O

Exercice: Eliminer, dans le tableau des modes possibles, les modes qui sont contraires aux règles (règles 5-8).

Les règles 5 – 8 éliminent 52 des 64 modes possibles.
12 modes sont conformes aux règles 5 – 8.

Modes valides

1. AAA AAI	5. EAE EAO	9. IAI	13. OAO
2. AEE *(AEO)*	6. /	10. *(IEO)*	14. /
3. AII	7. EIO	11. /	15. /
4. AOO	8. /	12. /	16. /

Le mode IEO est éliminé par la règle 3 (le prédicat de la conclusion est pris universellement, mais particulièrement dans la majeure). Le mode AEO sera éliminé dans deux «figures» selon les règles des figures (1 et 3) qui suivent. Dans les deux autres il est valide, mais inutile. Restent dix modes.

1.2.1.2.4 Les figures du syllogisme

Selon la position du moyen terme dans les prémisses, on distingue quatre figures du syllogisme[19].

figure 1: Le moyen terme est sujet de la majeure et prédicat de la mineure.
figure 2: Le moyen terme est deux fois prédicat.
figure 3: Le moyen terme est deux fois sujet.
figure 4: Le moyen terme est prédicat de la majeure et sujet de la mineure.

Avec M = moyen terme, G = grand terme, P = petit terme, on a les schémas suivants:

1ère figure	2ème figure	3ème figure	4ème figure
M G	G M	M G	G M
P M	P M	M P	M P

Exemples:

figure 1: Tous les hommes sont raisonnables.
Tous les Russes sont des hommes.
donc: Tous les Russes sont raisonnables.

figure 2: Tous les joueurs d'échecs sont logiciens.
Quelques ministres ne sont pas logiciens.
donc: Quelques ministres ne jouent pas aux échecs.

figure 3: Aucun criminel n'est policier.
Tous les criminels sont indignes de confiance.
donc: Quelques hommes indignes de confiance ne sont pas des policiers.

figure 4: Tous les philosophes sont des penseurs.
Tous les penseurs sont étrangers au monde.
donc: Quelques étrangers au monde sont philosophes.

[19] Le classement des syllogismes en 4 figures se fait depuis le 14ème siècle. Aristote ne parle expressément que de 3 figures. Mais il estime que les raisonnements de la 4e figure se réduisent à celle de la 1ère.

1.2.1.2.5 Les règles des figures

figure 1: La majeure doit être universelle, la mineure affirmative.
figure 2: Une des prémisses doit être négative (il en résulte que la conclusion doit l'être aussi). La majeure doit être universelle.
figure 3: La mineure doit être affirmative, la conclusion particulière.
figure 4: Si la majeure est affirmative, la mineure doit être universelle.
Si la mineure est affirmative, la conclusion doit être particulière.
Si la conclusion est négative, la majeure doit être universelle.

Exercice: Déterminer les modes valides pour chacune des 4 figures. Référez-vous au tableau des **Modes valides**.

1.2.1.2.6 Les modes valides du syllogisme selon les figures

Pour mémoriser la liste des modes valides, les logiciens du Moyen-Âge ont imaginé des mots artificiels, qui représentent les divers modes, et où les voyelles désignent, la première la majeure, la seconde la mineure, la troisième la conclusion. Voici les vers mnémoniques, pour les 4 figures:

> **Barbara** **Celarent** primae **Darii** **Ferio**que.
>
> **Cesare** **Camestres** **Festino** **Baroco** secundae.
>
> Tertia grande sonans recitat: **Darapti** **Felapton**,
>
> **Disamis** **Datisi** **Bocardo** **Ferison**.
>
> Quartae sunt **Bamalip** **Calemes** **Dimatis** **Fesapo** **Fresison**.

Modes à conclusion atténuée (valides par subalternation):

> **Barbari**, **Celaront**, **Cesarop**, **Camestrop**, **Calemop**.



1.2.2 Les Paralogismes - Sophismes

D'une manière générale on appellera «paralogisme» un raisonnement qui est non-valide. Plusieurs cas sont alors envisageables:

- la fausseté résulte d'une déduction faite selon des règles non acceptées;
- la fausseté résulte d'éléments non explicitement contenues dans les prémisses;
- la fausseté résulte d'une déduction faite à partir d'un changement du sens des prémisses en cours de déduction.

Pour les trois cas de figure on peut envisager que cette non-validité est involontaire ou alors qu'elle est voulue dans l'intention d'induire en erreur un opposant. On parlera de «sophisme» lorsque le paralogisme devra servir à tromper quelqu'un.

Les paralogismes péchant contre les règles du raisonnement correct ne feront pas l'objet d'un exposé distinct. Il y a d'innombrables façons de violer les règles et il n'y a qu'une façon de détecter ces violations: celle d'appliquer rigoureusement les méthodes de la vérification logique, comme par exemple la méthode des arbres.

Nous ne résistons toutefois pas au plaisir de citer un exemple amusant de sophisme sur le conséquent que l'on trouve dans le «Faust»[20] de Goethe:

Der Philosoph der tritt herein	
und beweist Euch es müsst so sein:	
Das Erst' wär so, das Zweite so,	prémisse (1)
Und drum das Dritt' und Vierte so,	
Und wenn das Erst' und Zweit' nicht wär',	prémisse (2)
Das Dritt' und Viert' wär' nimmermehr.	conclusion

Transcription:

Si (1 et 2) est vrai alors (3 et 4) est vrai,	(1)
(1 et 2) est faux,	(2)
donc, (3 et 4) est faux	conclusion

Avec les symboles de la logique nous avons:

$(A \wedge B) \rightarrow (C \wedge D)$	(1)
$\overline{A \wedge B}$	(2)
$\vdash \overline{C \wedge D}$	conclusion

[20] Faust I, 1930. Attention, c'est Méphisto qui parle avec l'intention de tromper, de distiller le faux. N'allons pas croire que Goethe ait été nul en logique!

Ceci correspond au schéma suivant:

$p \rightarrow q$

$\overline{p}$

$\vdash \overline{q}$

Or, ce raisonnement n'est pas valide et correspond même à une forme de pseudo-raisonnement très courant (voir vérification sub 2.4.1.4, exercice 4)

Dans ce chapitre, nous passerons en revue les paralogismes de type 2. et 3.: ceux qui reposent sur une justification extra-logique et ceux qui impliquent une ambiguïté de termes, de locutions ou de propositions entières.

Il faut souligner que les types de paralogismes sont bien plus nombreux que ne pourraient le faire croire les quelques exemples cités ici. Instruments de persuasion, les paralogismes sont depuis l'Antiquité un moyen rhétorique puissant pour convaincre. Les sophistes précisément arguaient que puisque aucune vérité ne pourrait jamais être établie définitivement, il ne restait à chacun qu'à présenter le mieux possible, donc aussi par tous les moyens, ses propres vérités.

Plus tard Arthur Schopenhauer écrira:

> *Also die objektive Wahrheit eines Satzes und die Gültigkeit desselben in der Approbation der Streiter und Hörer sind zweierlei. (...)*
> *Woher kommt das? - Von der natürlichen Schlechtigkeit des menschlichen Geschlechts. Wäre diese nicht, wären wir von Grund aus ehrlich, so würden wir bei jeder Debatte bloß darauf ausgehn, die Wahrheit zu Tage zu fördern, ganz unbekümmert ob solche unsrer zuerst aufgestellten Meinung oder der des Andern gemäß ausfiele: dies würde gleichgültig, oder wenigstens ganz und gar Nebensache sein. Aber jetzt ist es Hauptsache. Die angeborne Eitelkeit, die besonders hinsichtlich der Verstandeskräfte reizbar ist, will nicht haben, daß was wir zuerst aufgestellt, sich als falsch und das des Gegners als Recht ergebe. Hienach hätte nun zwar bloß Jeder sich zu bemühen, nicht anders als richtig zu urteilen: wozu er erst denken und nachher sprechen müßte. Aber zur angebornen Eitelkeit gesellt sich bei den Meisten Geschwätzigkeit und angeborne Unredlichkeit. Sie reden, ehe sie gedacht haben, und wenn sie auch hinterher merken, daß ihre Behauptung falsch ist und sie Unrecht haben; so soll es doch scheinen, als wäre es umgekehrt. Das Interesse für die Wahrheit, welches wohl meistens bei Aufstellung des vermeintlich wahren Satzes das einzige Motiv gewesen, weicht jetzt ganz dem Interesse der Eitelkeit: wahr soll falsch und falsch soll wahr scheinen*[21].

[21] cf. SCHOPENHAUER pp. 20 – 21. La citation garde l'écriture originale.

Dans une société où être persuasif est d'une importance capitale (pensons à la place de la publicité dans l'économie d'aujourd'hui), les paralogismes seront fréquents, au point qu'il est permis de se demander s'ils ne sont pas autant de sophismes…

1.2.2.1 LES PARALOGISMES À JUSTIFICATION EXTRA-LOGIQUE

Dans la plupart des paralogismes, les prémisses ne sont pas de nature à pouvoir justifier la conclusion: il est possible d'admettre les prémisses sans admettre la conclusion. Malgré cette invalidité parfois manifeste aux yeux d'un esprit attentif, les paralogismes ont une force de persuasion réelle. C'est qu'en général, ils suscitent des réactions émotives qui bloquent l'examen critique de ce qu'ils avancent.

1.2.2.1.1 L'appel à l'autorité

On commet le paralogisme de «*l'appel à l'autorité*», lorsqu'on raisonne de la façon suivante:

> Le président affirme que cette information est vraie.
> Donc, cette information est vraie.

Il y a lieu de noter que l'appel à l'autorité n'est pas toujours à proscrire: il est raisonnable de fonder sa croyance sur l'avis d'experts, qui a plus de chances d'être vrai que l'avis d'un ignorant[22].

Le ministre français de la Justice défendant le 17 septembre 1981 le projet de loi pour l'abolition de la peine de mort argumente[23]: «*…les dernières années, se sont prononcés hautement contre la peine de mort, l'Eglise catholique de France, le conseil de l'Eglise réformée et le rabbinat*» [24].

Cependant, comme l'avis même d'un expert n'est pas nécessairement vrai, l'appel à l'autorité ne peut jamais établir que la conclusion suit nécessairement des prémisses.

La méfiance est de mise particulièrement dans les cas où l'expert est cité à propos de questions pour lesquelles il n'est pas compétent.

1.2.2.1.2 L'appel à l'accord général

Dans certains cas, l'expert est remplacé par un groupe d'experts, par un groupe de personnes ou même par l'humanité en général. Dans ce cas, l'appel à l'autorité se transforme dans «*l'appel à l'accord général*».

---

[22] Pensons au rôle des experts auprès des tribunaux!
[23] … tout en précisant qu'il **ne veut pas** en faire un argument d'autorité!
[24] D'après BUFFON p.191.

Pierre, Paul, Anne et Marie affirment que l'hôtel Edelweiss est joli.
Donc l'hôtel Edelweiss est joli.

Les remarques faites pour l'appel à l'autorité s'appliquent également à l'appel à l'accord général: l'accord général n'est pas une garantie de la vérité.

1.2.2.1.3 L' argumentum ad hominem

L'«*argumentum ad hominem*» (contre la personne) a la même prémisse que l'appel à l'autorité, mais de cette prémisse, il entend tirer la fausseté de la proposition avancée:

A affirme que p est vrai[25].
Donc p est faux.

Le raisonnement sous-entend que A est tel qu'il ne peut pas dire la vérité. Si toutes les affirmations qu'A a faites dans le passé se sont révélées fausses, il est raisonnable de douter de la vérité de p, ou même de la considérer comme fausse jusqu'à preuve du contraire. Mais cela ne suffit pas pour pouvoir affirmer que la fausseté de p soit établie. Ceci est la version «injurieuse» de l'argument.

Une variante (1) de l' argumentum ad hominem est la suivante:

A a intérêt à ce que p soit accepté comme vrai.
Donc p est faux.

La justification repose sur le fait que la plupart des opinions sont propagées, non parce qu'elles sont vraies, mais parce qu'elles sont utiles pour certains intérêts. Evidemment cela ne peut pas établir la fausseté des opinions propagées. On appelle encore cet argument «*argumentum ad personam*».

Une variante (2) de l'argumentation ad hominem est la suivante:

A affirme que p est vrai, mais a autrefois affirmé que p était faux.
Donc p est faux.

On cherche donc à montrer que si A affirme p, il se met en contradiction avec ses convictions, ses actions, ses attitudes antérieures. On appelle cet argument «*tu quoque*»[26].

---

[25] A étant une personne quelconque.
[26] Du latin: toi aussi (… tu disais ce que je dis maintenant)!

Exemples pour les deux types:

> Mon ex-époux affirme que le nouveau restaurant est bon.
> Donc le nouveau restaurant est mauvais.
>
> La philosophie de Nietzsche sont les élucubrations d'un esprit malade.

Il s'agit de la forme injurieuse de l'argumentum ad hominem. Juger la qualité d'un restaurant d'après le sentiment qu'on éprouve envers celui qui le loue n'a pas de consistance logique. De même, tirer argument de la maladie (tardive) de Nietzsche n'est pas un critère pour évaluer sa pensée.

> Ne croyez rien de ce que le professeur A dit de l'importance d'augmenter les salaires des enseignants. Etant enseignant lui-même, il ne peut pas ne pas soutenir une augmentation de son salaire.

Il s'agit de la variante (1). Ce n'est pas parce que quelqu'un a intérêt pour présenter un argument que par cela même cet argument devienne mauvais.

> Le chasseur à qui l'on reprochait de tuer des bêtes innocentes, répondit: «Pourquoi mangez-vous des bœufs qui ne vous ont fait aucun mal?»

Le chasseur argumente en fait:

> Toi, l'ami des bêtes, tu me dis de ne pas tuer un animal qui ne m'a fait aucun mal.
> Or, tu manges de la viande provenant d'un être qui ne t'a fait aucun mal, donc tu es en contradiction avec ce que tu me dis.
> Donc je peux chasser.

Il s'agit de la variante (2). Puisqu'on admet que l'ami des bêtes est inconséquent, on en conclut que ce qu'il affirme maintenant est faux. Du point de vue de la logique, l'inconséquence historique d'une personne n'est pas un argument contre la position qu'elle défend.

1.2.2.1.4 Le paralogisme de l'accident

On commet le paralogisme de «*l'accident*» en appliquant une règle générale à un cas particulier dont les circonstances accidentelles rendent la règle inapplicable.

> Tous ceux qui frappent délibérément une autre personne devraient être sévèrement punis.
> Ce champion de boxe devrait se trouver en prison.

Les enfants indisciplinés ne font rien de bon.
Einstein était un enfant indiscipliné.
Einstein n'a rien fait de bon[27].

1.2.2.1.5 La généralisation abusive

La généralisation abusive consiste à présenter ce qui est vrai par accident comme cas typique d'une règle générale. On appelle encore ce paralogisme «*secundum quid*»[28].

Il est naturel que l'Etat enferme les criminels et les fous dans des maisons spéciales.
Rien ne s'oppose donc à ce que l'Etat limite les libertés individuelles de ses citoyens.

Il est bon de se promener.
Donc, il est bon de se promener pendant les heures de travail[29].

Pensons aussi à l'audiovisuel qui est source constante de paralogismes «*secundum quid*» implicites. Lors d'interviews, la télévision nous montre par exemple un agriculteur parlant des difficultés concernant son élevage de poulets. Il est censé être représentatif de sa profession. Oui, mais n'aurons-nous pas tendance à déduire que ce qui vaut pour lui, vaut pour tous les agriculteurs, allant par là bien au-delà de sa seule *représentativité*?

1.2.2.1.6 Les paralogismes de la cause

Il y a différentes manières de s'abuser ou d'abuser les autres en raisonnant à l'aide de la relation causale.

Le premier de ces paralogismes est traditionnellement appelé «*post hoc ergo propter hoc*» (*après cela; donc à cause de cela*). Il consiste à considérer deux événements comme causalement reliés pour la seule raison qu'un des événements précède l'autre dans le temps. Il y a confusion entre consécution et conséquence.

Le médicament Freehead est efficace contre les maux de tête, car j'en ai pris et au bout de deux jours le mal de tête avait disparu.

Il s'agit d'un paralogisme très fréquent dans la vie de tous les jours. Toutes les superstitions reposent aussi sur une telle confusion :

---

[27] Exemple tiré de THIRY
[28] «*A dicto secundum quid ad dictum simpliciter* » – traduction: «ce qui devrait être dit sous un certain aspect est dit de manière absolue».
[29] Exemple tiré de THIRY

> Juste avant sa crucifixion Jésus était à table avec ses douze apôtres, donc il est dangereux d'être treize à table.

Le second paralogisme de la cause résulte de l' «*inversion de la cause et de l'effet*».

> Un réformateur anglais du 19ème siècle avait remarqué que chaque cultivateur sobre et travailleur possédait au moins une ou deux vaches. Ceux qui n'en avaient pas étaient des ivrognes et des paresseux. Il proposait donc de donner une vache à chaque cultivateur qui n'en avait pas pour les rendre sobres et travailleurs.

On peut fort bien se demander si ce n'est pas plutôt à cause de leur ivresse que ces agriculteurs étaient incapables de s'occuper de leur bétail!

Le troisième paralogisme est celui de la cause commune. Il consiste à conclure ' A est la cause de B ', alors que A et B ne sont que les effets d'une cause commune C.

> L'éclair est la cause du coup de tonnerre ou le coup de tonnerre est la cause de l'éclair.

Non, il n'y a pas de relation causale entre les deux phénomènes. Mais c'est une décharge électrique dans l'atmosphère qui est la cause à la fois d'un phénomène visuel, l'éclair, et d'un phénomène sonore, le coup de tonnerre.

> Il a été constaté que les célibataires consommaient plus de sucreries que les gens mariés.
> Donc, si je me marie je consomme moins de sucreries.

En fait, il n'y a pas de corrélation entre le célibat et la consommation de sucreries. La cause des deux phénomènes (se marier / consommer moins de sucreries) est la même: l'âge qui change! Un enfant consommera plus de sucreries qu'un adulte, mais il y a de fortes chances qu'il ne soit pas encore marié.

1.2.2.1.7 La pétition de principe

La «*pétition de principe*» consiste à supposer prouvé ce qui est en question: l'équivalent de la conclusion figure déjà dans une des prémisses.

Il est à remarquer que la pétition de principe est un raisonnement valide: si la prémisse en question est vraie, son équivalent dans la conclusion l'est aussi. Seulement, ce raisonnement passe à côté du but qui est normalement celui du raisonnement: démontrer la conclusion à partir de prémisses qui sont acceptées indépendamment de la conclusion.

Un bel exemple est donné par Arnaud & Nicole à propos d'Aristote lui-même[30], alors que celui-ci cite expressément la pétition de principe comme étant un type possible de paralogisme dans ses «*Réfutations sophistiques*»:

> «Cependant Gallilée l'accuse (Aristote), & avec justice, d'être tombé lui-même dans ce défaut, lorsqu'il veut prouver par cet argument que la terre est au centre du monde.
>
> *La nature des choses pesantes est de tendre au centre du monde, & des choses légères de s'en éloigner:*
> *Or l'expérience nous fait voir, que les choses pesantes tendent au centre de la terre, & que les choses légères s'en éloignent:*
> *Donc le centre de la terre est le même que le centre du monde.*
>
> Il est clair qu'il y a dans la majeure de cet argument une manifeste pétition de principe. Car nous voyons bien que les choses pesantes tendent au centre de la terre; mais d'où Aristote a-t-il appris qu'elles tendent au centre du monde, s'il ne suppose que le centre de la terre est le même que le centre du monde? Ce qui est la conclusion même qu'il veut prouver par cet argument.»

Le «*cercle vicieux*» est un cas particulier de la pétition de principe. On démontre une conclusion C à l'aide d'une prémisse P et P est démontré à l'aide de C.

> Dieu existe, car la Bible le dit et nous devons la croire, car elle est la parole révélée de Dieu.

Pour rendre plus apparent le «cercle», on pourra reformuler le raisonnement de la manière suivante:

> La Bible dit que Dieu existe.
> Dieu s'exprime dans la Bible.
> Ainsi Dieu dit que Dieu existe.
> Donc Dieu existe.

1.2.2.1.8 La question complexe

Certaines questions semblent appeler une réponse simple, alors qu'en fait ce sont des questions complexes exigeant une réponse complexe.

> Continuez-vous à battre votre femme?

---

[30] cf. ARNAUD & NICOLE p. 306. La citation garde l'écriture de l'époque.

Imaginons que la question soit posée lors d'un interrogatoire de police. Que le suspect réponde par oui ou par non, on aura comme conclusion que cela a été le cas.

> Continuez-vous à battre votre femme?
> (Oui) / (Non)
> Donc vous avez battu votre femme!

En fait, il faudrait récuser tout simplement la question (si l'on n'est pas concerné…!).

Le paralogisme de la question complexe consiste à tirer une conclusion à partir d'une réponse simple à une question complexe.

> Vous êtes-vous enrichi personnellement par suite de la faillite frauduleuse?
> Non.
> Donc vous admettez que la faillite a été frauduleuse.

1.2.2.1.9 L'ignorance de la question

On commet le paralogisme de «*l'ignorance de la question*»[31], lorsqu'on prétend prouver une certaine thèse tout en prouvant en réalité une thèse différente. En fait, il consiste à réfuter autre chose que ce qui est en discussion.

> «*C'est un vice très ordinaire dans les contestations des hommes. On dispute avec chaleur, & souvent on ne s'entend pas l'un l'autre. La passion ou la mauvaise foi fait qu'on attribue à son adversaire ce qui est éloigné de son sentiment, pour le combattre avec plus d'avantage, ou qu'on lui impute les conséquences qu'on s'imagine pouvoir tirer de sa doctrine, quoiqu'il les désavoue & qu'il les nie.*»[32]

> Etes-vous sûr que cet homme est honnête?
> Naturellement puisque je vous ai prouvé qu'il est riche et par conséquent à l'abri du besoin[33]!

Avoir prouvé qu'il est riche et à l'abri du besoin c'est une chose, qu'il soit honnête pour autant en est une autre!

---

[31] en latin : *ignoratio elenchi* c'est-à-dire l'ignorance de la réfutation. Elenchus venant du grec : ελεγχοζ = la démarche pour réfuter, ensemble et par le dialogue avec l'adversaire, l'opinion défendue par celui-ci.
[32] cf. ARNAUD & NICOLE p. 304
[33] cf. GEX p.180

> Nos tests ont montré que cette substance chimique a une réelle valeur médicale. Nous concluons donc que sa commercialisation sera un succès complet.

Il n'y a aucune relation directe entre la prémisse et la conclusion (même si nous pouvons avoir une forte présomption que tel est le cas, mais pensons aussi aux médicaments contre les maladies rares qui ne seront certainement pas à l'origine de succès commerciaux).

1.2.2.2 LES PARALOGISMES DE L'AMBIGUÏTÉ

Une deuxième série de paralogismes est caractérisée par le fait que les termes employés au cours du raisonnement sont ambigus et ruinent ainsi, le cas échéant, la validité du raisonnement.

1.2.2.2.1 L'équivocité

La plupart des mots de la langue naturelle sont équivoques, c'est-à-dire sont employés dans deux ou plusieurs significations différentes. Si un tel emploi se présente au cours d'un raisonnement, le raisonnement est invalide.

> La fin d'une chose est sa perfection.
> La mort est la fin de la vie.
> Donc la mort est la perfection de la vie.

D'une manière très classique c'est ici le moyen terme qui fait problème. Dans la première prémisse, «*la fin d'une chose*» signifie «*la finalité d'une chose*», ce en vue de quoi cette chose est. Dans la deuxième prémisse, le même mot «*fin*» signifient «*l'arrêt*». On a donc changé le sens du moyen terme et le raisonnement n'est plus valide.

«*L'équivocité*» est aussi une source intarissable pour de beaux paradoxes, tels celui du fromage suisse:

> Plus on a de fromage, plus on a de trous.
> Mais, plus on a de trous, moins on a de fromage.
> Donc, plus on a de fromage, moins on en a!

Syllogisme hypothétique formellement correct, ce raisonnement pèche par une utilisation changeante du sens du terme «*fromage*». Dans la première prémisse, le terme «*fromage*» désigne la quantité brute (le volume) de fromage, trous inclus. Mais dans la deuxième prémisse, le terme «*fromage*» désigne la quantité nette (la masse), sans les trous.

1.2.2.2.2 L'amphibolie

«*L'amphibolie*» désigne une proposition qui par sa structure syntaxique a plusieurs sens.

> L'intérêt pour l'argent de Monsieur Némo est au-dessus de la moyenne.
> Celui de Mme Némo est au-dessous de la moyenne.
> Il en suit que Monsieur Némo aime mieux l'argent que sa femme.
> Ce mariage ne durera pas longtemps, car comment peut-il supporter une femme à laquelle il préfère l'argent?

L'erreur réside dans la conclusion intermédiaire «*Il en suit que Monsieur Némo aime mieux l'argent que sa femme*». Dans son contexte elle signifie: «*donc, l'intérêt pour l'argent de Monsieur Némo est plus grand que l'intérêt pour l'argent de son épouse*».

Mais comme sa formulation est ambiguë, on pourrait entendre aussi: «*Monsieur Némo préfère l'argent à sa femme*», ce qui justifierait (et encore!) le passage à la conclusion concernant la pérennité du mariage des époux Némo!

1.2.2.2.3 Le paralogisme de la composition

Au sens large, on commet un paralogisme de la «*composition*» en attribuant à un tout les propriétés qui ne reviennent qu'aux parties du tout.

> Les soldats sont prêts à l'attaque
> Donc l'armée est prête à l'attaque.

Dans l'histoire de l'humanité, combien d'attaques ont bien pu être lancées, après qu'une information concernant les combattants ait été comprise comme se rapportant à l'ensemble? Les soldats peuvent bien être prêts individuellement (physiquement et psychiquement) sans que leur armée ne le soit (par exemple du point de vue logistique ou stratégique).

Au sens restreint, le paralogisme de la composition consiste à passer indûment de *l'usage distributif* à *l'usage collectif* d'un terme au cours d'un raisonnement.

Certains termes de la langue naturelle ont un double usage. Ils peuvent caractériser soit des ensembles (des touts), soit des éléments d'ensembles (des parties de touts). Le premier usage est collectif, le second est distributif.

Ainsi on a:
Les étudiants de ce lycée ont trois leçons de français par semaine.
(usage distributif: chaque étudiant)

Les étudiants de ce lycée ont cent vingt leçons de français par semaine (usage collectif: l'ensemble des étudiants).

> Les étudiants de ce lycée ont trois leçons de français par semaine.
> Donc les étudiants de ce lycée n'ont besoin que d'un professeur pour leur enseigner le français.

Dans la conclusion, «*les étudiants de ce lycée*» est pris dans un sens collectif, contrairement à son usage dans la prémisse. A moins de n'avoir qu'un nombre (très) restreint de classes, les élèves auront besoin de plus d'un enseignant (rares étant ceux qui voudront enseigner cent vingt heures par semaine…).

1.2.2.2.4 Le paralogisme de la division

Au sens large, le paralogisme de la «*division*» consiste à attribuer aux parties d'un tout les propriétés qui ne reviennent qu'au tout.

> Il est notoire que l'armée est inefficace.
> Nous ne pouvons donc pas attendre du colonel Nullot un travail efficace.

Au sens restreint, le paralogisme de la division consiste à passer indûment de l'usage collectif à l'usage distributif d'un terme au cours d'un même raisonnement.

> Les bisons sont en voie de disparition.
> Voilà un bison.
> Donc ce bison est en voie de disparition.

1.2.2.3 HUMOUR ET PARALOGISMES

Les paralogismes (et paradoxes) constituent aussi une source inépuisable pour les humoristes. C'est particulièrement le paralogisme par ambiguïté qui est un instrument humoristique très fort surtout du moment qu'il mène à des formulations paradoxales.

Prenons l'exemple suivant tiré d'un sketch de Raymond Devos[34], un maître absolu de l'art de jongler avec le langage et la logique:

> «Mesdames et messieurs je vous signale tout de suite que je vais parler pour ne rien dire **(1)**.
> (…) Et si vous-mêmes, mesdames et messieurs vous n'avez rien à dire, eh bien, on en parle, on en discute!
> Je ne suis pas ennemi du colloque.
> Mais me direz-vous, si on parle pour ne rien dire, de quoi allons nous parler?
> Eh bien, de rien! De rien!
> Car rien… ce n'est pas rien **(2)**!
> La preuve c'est qu'on peut le soustraire.
> Exemple: rien moins rien = moins que rien **(3)**!
> Si l'on peut trouver moins que rien, c'est que rien vaut déjà quelque chose **(4)**! On peut acheter quelque chose avec rien **(5)**! En le multipliant!
> Une fois rien… c'est rien!
> Deux fois rien… c'est pas beaucoup!
> Mais trois fois rien!… Pour trois fois rien, on peut déjà acheter quelque chose **(6)**… et pour pas cher!
> Maintenant si vous multipliez trois fois rien par trois fois rien:
> rien multiplié par rien = rien,
> trois multiplié par trois = neuf,
> cela fait: rien de neuf **(7)**.
> Oui… Ce n'est pas la peine d'en parler…»

Parler pour ne rien dire[35]

Analyse:

(1) L'expression a généralement pour sens qu'on peut parler (= à la manière des perroquets) sans rien dire (= communiquer un message doté d'un sens). Mais Devos revient ici au sens littéral: si je parle, je dis quelque chose, donc je ne puis «*parler pour ne rien dire*», car ce serait un paradoxe. Le paradoxe naît d'un glissement de sens «*ne rien dire*» ne signifiant ici non pas «*ne rien exprimer d'intéressant*» mais «*se taire*». Le comique repose sur ce

[34] Comique français d'origine belge (1922 – 2006).
[35] Raymond DEVOS, *Matière à rire*, Paris, Orban, 1991.

paralogisme de l'ambiguïté et le génie de Devos consiste à reprendre le sens littéral de l'expression.

(2) Un axiome élémentaire de logique dit que «p ↔ p», une proposition est égale à elle-même (principe d'identité). Donc 'être rien' est égal à 'être rien'. Le résultat paradoxal, et donc le rire qu'obtient Devos repose encore sur un déplacement de sens: dire de quelque chose «*ce n'est pas rien*» signifie «*ce n'est pas une petite affaire, cela compte*»[36]. A première vue donc l'expression semble en contradiction avec le principe d'identité par paralogisme de l'ambiguïté. Mais une deuxième lecture, plus philosophique, justifie pleinement l'expression prise au sens: le «*néant, le rien*» est un problème métaphysique classique intéressant. Le néant a-t-il de l'être? Comment parler du néant s'il n'est pas…? Donc le néant doit avoir de l'existence. Ici on frise le gouffre métaphysique. Il faudra se demander si le terme «*existence*» a la même portée s'agissant du «*néant*» que de l'«*être*». En disant «*ce **n'est pas** rien*», l'auteur **chosifie** (le rien *est* quelque chose) ce qui est en fait une **négation**[37]. Devos joue sur cette difficulté pour nous faire commettre un paralogisme par ambiguïté et nous faire rire: comment le «*rien*» pourrait-il exister pareillement à l'«*être*»?

(3) Ayant admis (!) ainsi que le rien «*est*», retrancher un «*rien*» qui «*est*» quelque chose, d'un autre «*rien*» lui aussi «*étant*» quelque chose, la simple arithmétique autoriserait à dire que le résultat est «*moins que rien*». L'auditeur est amené sur une fausse piste par l'affirmation précédente que le «*rien*» a une existence identique à l'«*être*» et sachant parfaitement que les mathématiques disent que «*0 – 0 = 0*», il va rire de ce tour de passe-passe. Le même paralogisme par ambiguïté est exploité encore ici.

(4) Devos continue sur le même paradoxe sur l'existence du néant. Il justifie (2) par (3): comme «*il y a du moins que rien*», «*le rien doit valoir quelque chose*». Or, dans un mouvement inverse, il vient précisément de justifier (3) par (2)! Bel exemple de paralogisme par cercle vicieux. Mais il faut aussi noter ici le prochain glissement de sens: dans (2) il était question de l'«***existence** du rien*», mais maintenant il est question de la «***valeur** du rien*».

(5) Cette ambiguïté permet d'induire le prochain paralogisme avec résultat paradoxal: si je veux acheter quelque chose je dois nécessairement avoir de l'argent. Le bon sens (et la triste réalité économique) dit: si je n'ai rien, je ne pourrais rien acheter. Devos nous ayant amené à admettre (?) que le «*rien vaut quelque chose*», il faudra admettre avec lui qu'avec «*rien on peut acheter quelque chose*».

---

[36] cf. «Le Grand Robert»
[37] En linguistique cette substitution d'une catégorie logique ou grammaticale à une autre catégorie (ici la chose à une négation) s'appelle une hypostase.

(6) Nous restons dans la même démarche et trois fois ce «*rien qui a de la valeur*» laisse augurer de belles emplettes! Mais la multiplication par trois induit le bouquet final.

(7) Mathématiquement on semble avoir:
(3 x rien) x (3 x rien) = [*(3 x 3) x (rien x rien) pas dans le texte*] = (rien x rien) x (3 x 3) = rien x neuf.
Si pour la structure du calcul il n'y a rien à redire, en mathématiques on aura évidemment 0 comme résultat. Mais l'astuce, c'est de passer du niveau mathématique au niveau du langage parlé: le terme «*neuf*» change de sens: de nombre «*9*» il devient le qualificatif: «*nouveau*».

Ce changement du sens permet ainsi à Raymond Devos de revenir sur son propos initial: «*parler pour ne rien dire*» qui devient «*parler pour ne rien dire de neuf*»! Il a prouvé ce qu'il voulait prouver. La boucle est bouclée.

On remarquera que toute la «logique» du texte repose sur l'hypostase effectuée sub (2): une fois la *chosification du rien* réalisée, tous les autres développements en découlent. L'ambiguïté est le moteur principal de toute cette démarche comique.



1.2.3 Les Paradoxes

On définira utilement un «paradoxe» à partir de son étymologie. «παρα» en grec signifie «à côté», «au-delà de» et «δοξα» signifie «opinion», «croyance», «apparence».

Ainsi un paradoxe est un énoncé qui va à l'encontre de ce à quoi on s'attendait. Un paradoxe est un énoncé qui produit une ou des conséquences inattendues ou encore contradictoires.

Une conséquence apparemment inacceptable, déduite de manière apparemment correcte de prémisses elles-mêmes apparemment acceptables est un défi pour tout logicien, mais aussi pour chacun d'entre nous.

Nous avons alors le choix. Soit la déduction a été mal faite, mais alors nous sommes en présence d'un simple paralogisme sur la conséquence, ce qui est inintéressant et relève de la faute ou de la mauvaise intention.

Ou alors la conséquence n'est pas si inacceptable qu'elle n'en a l'air au départ et ce qui est en cause, ce n'est pas elle, mais notre faiblesse d'esprit.

Ou alors les prémisses ou l'utilisation qui en est faite souffrent d'une faiblesse cachée qui révèle à son tour un problème théorique nouveau qu'il sera intéressant de résoudre.

Les paradoxes ont un fort pouvoir ludique puisqu'ils interpellent notre faculté de réfléchir correctement. Ils nous montrent nos limites[38] et nous ouvrent des pistes de réflexion nouvelles.

Ils révèlent alors les limites du langage et des systèmes axiomatiques (mathématiques). Ainsi ils interpellent les philosophes et les scientifiques qui ne peuvent accepter des incohérences et des contradictions dans la logique, les mathématiques et les sciences.

Il existe de très nombreux paradoxes, certains très anciens, qu'il serait impossible de signaler tous ici. Nous reprendrons les plus connus, avec des indications sur la possible résolution du paradoxe.

---

[38] Les cyniques diront qu'ils montrent surtout la faiblesse d'esprit des autres… d'où leur intérêt en société…

1.2.3.1 PARADOXES MATHÉMATIQUES OU SYNTAXIQUES

Ces paradoxes trouvent leur origine dans des concepts logiques [p.ex. les ensembles].

Bertrand Russell[39] revient en fait un paradoxe inhérent à la théorie des ensembles proposée par Georg Cantor (1845 – 1918) à la fin du 19ème siècle. Cette théorie avait déjà donné lieu à des discussions puisqu'elle impliquait des paradoxes quant aux ensembles infinis.

Russell quant à lui révèle le paradoxe suivant. Un ensemble peut-il être un élément d'un ensemble? Oui, car E_h = «l'ensemble des hommes» fait partie de E_{100} = «l'ensemble des ensembles comptant plus de 100 éléments».
On a $E_h \in E_{100}$.

Par contre, E_{12a} = «l'ensemble des douze apôtres» ne fait pas partie de cet «ensemble des ensembles comptant plus de 100 éléments».
Donc $E_{12a} \notin E_{100}$.

Certains ensembles se contiennent eux-mêmes, d'autres ne se contiennent pas eux-mêmes. Ainsi E_e = «l'ensemble des ensembles» se contient lui-même, de même que «l'ensemble des ensembles comptant plus de 100 éléments».
On a $E_e \in E_e$ de même que $E_{100} \in E_{100}$.

Mais E_h = «l'ensemble des hommes» ne se contient pas lui-même.
On a $E_h \notin E_h$.

Considérons maintenant ces ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes.

Si on a l'ensemble E_R = «l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes». Est-ce qu'on a alors:
$E_R \in E_R$ ou $E_R \notin E_R$?

Si E_R est élément de soi-même, alors il ne peut pas faire partie de E_R donc de soi-même. Par contre si E_R n'est pas un élément de soi-même, alors il doit faire partie de E_R donc de soi-même!

D'une manière générale on écrira:
si $E_R = \{x \mid x \text{ est un ensemble et } x \notin x\}$
alors on a: $(E_R \in E_R) \leftrightarrow (E_R \notin E_R)$.

---

[39] Grand mathématicien, philosophe et moraliste britannique qui vécut de 1872 – 1970.

Ceci est un problème grave, car ce paradoxe, construit à partir des éléments d'un système mathématique, met en cause la validité de ce système mathématique qui devrait être consistant, c'est-à-dire ne pas produire de contradictions. Ce paradoxe amènera les mathématiciens à se poser la question si un système mathématique complet est possible ou non. La révélation de paradoxes a eu ainsi des conséquences majeures pour les mathématiques modernes. Les mathématiciens n'avaient rien de moins à faire que de sauver leur science.

Les tentatives de résolution partent de la constatation que la notion même d'«ensemble» est problématique, parce que trop imprécise. Les tentatives de résolution vont du refus de concepts sans prédicats, par une hiérarchisation des ensembles (types) jusqu'à un changement des principes logiques élémentaires.

Une formulation plus populaire du paradoxe de Russell est le «**paradoxe du Barbier**» (de Séville).

> «Le barbier rase tous les hommes de sa ville qui ne se rasent pas eux-mêmes. Peut-il se raser lui-même ou non?»

S'il se rase lui-même, il enfreint la règle, car le barbier ne peut raser que les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes;

S'il ne se rase pas lui-même (qu'il se fasse raser ou qu'il conserve la barbe), il est en tort également, car il a la charge de raser les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes.

On voit aisément que le problème vient de la définition de l'ensemble: raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes relève tout simplement de l'impossible, le barbier en faisant partie. Plus simplement encore, on peut voir dans ce paradoxe un simple sophisme par «secundum quid». Il consiste à étendre sur une chose dans sa totalité un aspect de cette chose. Dans ce cas précis on retient de manière absolue la qualité «d'être barbier» pour faire de cet homme, accessoirement barbier, un être uniquement et essentiellement barbier.

Le «**Barbier**» ne semble donc rendre qu'imparfaitement le paradoxe de Russell.

1.2.3.2 PARADOXES SÉMANTIQUES

Ces paradoxes trouvent leur origine dans le sens (la vérité) de ce qui est dit.

Le **«paradoxe de Berry»**[40] peut s'énoncer de la manière suivante:

> Imaginez «le plus petit nombre naturel dont la définition ne peut compter moins de 16 mots».

Cette phrase, qui compte 15 mots, est la définition même du nombre qu'elle ne saurait définir. Le plus petit nombre naturel que l'on ne peut définir avec moins de 16 mots, est définissable avec moins de 16 mots!

Il peut être rapproché du **«Menteur»** connu depuis l'Antiquité. C'est Eubulide de Mégare[41] qui le formula ainsi que d'autres paradoxes (cf. le «sorite») et sophismes (du genre «Ce que tu n'as pas perdu, tu l'as; tu n'as pas perdu tes cornes, donc tu as des cornes!»).

Il y a beaucoup de formulations possibles de ce paradoxe:

«un homme ment-il s'il dit qu'il ment?»,
«ce que je dis maintenant est faux»,
«cet énoncé est faux»,
…

Retenons cette dernière formulation. On a: si cet énoncé dit vrai, alors il est faux, et s'il dit le faux alors il est vrai. Il est donc vrai si et seulement s'il est faux.

Regardons de plus près ce paradoxe: Si nous admettons qu'il est vrai, alors il est faux; il ne peut donc être vrai. Si nous admettons qu'il est faux, alors il est vrai; il ne peut donc être faux. On remarque alors plus clairement que cet énoncé n'est ni vrai ni faux.

Mais un énoncé qui ne peut pas être vrai ou faux, n'est pas une proposition. Or, et c'est probablement notre erreur initiale, «cet énoncé est faux» *a l'apparence* d'une proposition! Et ceci nous amène à attendre de cet énoncé, une propriété qui n'appartient qu'aux propositions: pouvoir être décidable (vrai / faux).

Plus fondamentalement, l'erreur semble être que cet énoncé parle de lui-même. Il est «autoréférent», de même que l'énoncé de Berry d'ailleurs. Le logicien dira qu'il y a en l'occurrence un mélange illicite entre langage et

---

[40] Berry était le nom du bibliothécaire ayant présenté ce paradoxe à Russell.

[41] Eubulide (vers -360) était le successeur d'Euclide de Mégare, lui-même disciple de Socrate, comme le fut Platon, mais plus âgé que celui-ci.

métalangage. L'énoncé dit bien quelque chose du monde, mais cet objet c'est lui-même et pour parler d'un objet d'un langage, il faut utiliser un langage d'un second ordre.

Une variante du «**Menteur**» est le «**Crétois**». Le paradoxe s'énonce de la manière suivante:

> «Epiménide[42] le Crétois dit: tous les Crétois mentent toujours.»[43]

Admettons que l'affirmation d'Epiménide soit vraie. Tous les Crétois, donc lui aussi, seraient des menteurs et il serait en train de mentir et son affirmation serait fausse.

Admettons maintenant qu'elle soit fausse, alors au moins un Crétois dit au moins une fois la vérité!!

Est-ce le cas d'Epiménide en ce moment? Nous n'en savons rien, à moins qu'il ne soit le seul Crétois et qu'il ne parle qu'en ce moment ! En tous cas, nous remarquons que, contrairement au «Menteur», la supposition que l'affirmation soit fausse ne mène pas forcément à une contradiction. On peut supposer que l'autoréférence est amoindrie ici par le fait que l'énoncé parle aussi d'autres objets du monde que de soi-même, à savoir tous ceux qui sont Crétois sans être Epiménide.

Signalons enfin que pour certains auteurs, dont Russell lui-même, le paradoxe des ensembles et le «Menteur» se ressemblent et ont en fait la même origine.

1.2.3.3 PARADOXES DE L'INFINI

Ces paradoxes révèlent les difficultés d'utilisation de l'infini. Les paradoxes les plus connus sont ceux de Zénon. Zénon d'Elée[44], vécut vers – 500 et a conçu un certain nombre d'arguments qui aboutissent à des paradoxes touchant aussi bien l'espace que le temps. On en est réduit aujourd'hui à des suppositions quant à l'utilité de ces arguments. Il est difficile de concevoir que Zénon ait effectivement voulu démontrer qu'Achille n'allait jamais rattraper la tortue, et que la flèche jamais n'atteindrait son but! On admet par

[42] DIOGÈNE LAERCE cite un Epiménide natif de Crète ayant été à Athènes durant la 48ème olympiade (vers – 584). Il avait la réputation de posséder des dons de divination et de guérisseur. Jeune, il serait tombé dans une grotte et y aurait dormi 57 ans. Il serait décédé âgé de 157 ans, les Crétois prétendant même qu'il en avait 299…Remarquons tout de même que ceux-ci ont encore aujourd'hui la réputation, avérée, d'une grande longévité.

[43] D'une manière générale les Crétois semblent avoir cette mauvaise réputation dans l'Antiquité jusques à l'apôtre Paul qui écrira d'eux dans sa lettre à Titus (préposé de la communauté chrétienne dans l'île): [12] «*L'un d'entre eux, leur propre inspiré, a dit: 'Crétois toujours menteurs, méchantes bêtes, panses oisives.'*»…

[44] Ville du sud de l'Italie; aujourd'hui «Castellmare di Velia» au sud de Salerno.

contre que Zénon voulait révéler les difficultés qu'il y a à diviser à l'infini, l'espace ou le temps.

Dans l'Antiquité on lui attribuait jusqu'à 40 arguments contre le mouvement et la multiplicité. Les plus célèbres sont «*les grains de mil*», «*le stade*», «la flèche», «*Achille et la tortue*»

Nous n'allons reprendre que le plus célèbre des paradoxes de Zénon: «**Achille et la tortue**».

Il y a beaucoup de formulations pour ce paradoxe que l'on pourrait présenter des manières suivantes:

> (Z1) Achille défie la tortue pour une course à pied. Magnanime, il donne à la tortue une avance X. Pour rattraper la tortue, Achille doit d'abord franchir la distance X. Or, entre-temps la tortue aura avancé d'une distance Y, qu'Achille devra maintenant franchir, mais entre temps la tortue aura à nouveau parcouru un espace Z et ceci à l'infini. Il devrait donc parcourir une infinité d'espaces ce qu'il ne peut faire en un temps fini. Donc, jamais Achille ne sera en mesure de rattraper la tortue!

Une variante de l'argument dit:

> (Z2) Pour rattraper la tortue, Achille doit d'abord parcourir la moitié du chemin (1/2), puis la moitié de la moitié restante (1/4) etc. Jamais il n'atteindra donc la fin du chemin à parcourir, puisqu'il reste toujours à parcourir une moitié (de plus en plus infime) du chemin restant.

En retournant cette dernière présentation, l'on pourrait encore dire:

> (Z3) Avant de parcourir la totalité du chemin, Achille doit en parcourir la moitié, avant de parcourir celle-ci, il doit parcourir la moitié de la moitié et ceci jusqu'à l'infini et donc il ne partira même pas!

Que voulait dire Zénon? Aristote voyait en Zénon «l'inventeur de la dialectique», au sens qu'il était capable, par ses arguments, d'embarrasser son interlocuteur, ce qui est précisément le cas avec l'«Achille». Zénon voulait probablement argumenter par «*réduction à l'impossible*». Nous savons bien qu'Achille va rattraper la tortue, mais comment éviter la conclusion impossible de Zénon?

L'intention de Zénon était peut-être de démontrer l'unité de l'être, puisqu'il serait absurde de diviser l'espace en des parties de plus en plus petites.

On a tendance à dire que Zénon se trompe, mais en fait c'est lui qui essaie de montrer qu'il est impossible de concevoir l'espace comme étant divisible à l'infini, que donc d'autres philosophes que lui se trompent. L'espace (et le temps) seraient un continu et que l'on ne peut diviser l'ensemble E_t des moments du temps en deux ensembles E_{t1} et E_{t2}, comme l'on peut diviser un ensemble de douze œufs en deux demi-ensembles de six œufs. Ni le dernier élément (moment) de E_{t1}, ni le premier élément (moment) de E_{t2} ne peuvent être déterminés, puisque formant un continu.

Pourtant l'on peut aussi dire que Zénon se trompe! En reprenant (Z2), l'argument de Zénon est: la somme de 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 … est infiniment grande. Non, les mathématiques enseignent que c'est 1! Or, à ce moment, le problème de l'infinie distance que l'on ne pourrait parcourir que dans un temps infini ne se pose plus et Achille rattrape la pauvre tortue en quelques enjambées[45].

Les paradoxes de Zénon sont loin d'être de petits jeux, mais nous font réfléchir sur l'espace, le temps, le mouvement, le continu et l'infini. Aujourd'hui encore ils interpellent les mathématiciens et les philosophes. Les quelques réponses au paradoxe formulées ici, ne sont que de timides pistes et ne prétendent en rien donner des réponses définitives.

Citons tout de même une des versions les plus récentes de ce paradoxe:

> «*(…) la tête de Zidane n'aurait jamais dû atteindre son adversaire, car, chaque fois que la tête de Zidane aurait parcouru la moitié du chemin qui la séparait du torse de l'adversaire, il lui en serait resté encore une autre moitié à parcourir, puis une autre moitié, puis une autre moitié encore, et ainsi de suite éternellement, de sorte que la tête de Zidane, progressant toujours vers sa cible mais ne l'atteignant jamais, comme dans un immense ralenti monté en boucle à l'infini, ne pourra pas, jamais, c'est physiquement et mathématiquement impossible (c'est le paradoxe de Zidane, si ce n'est celui de Zénon), entrer en contact avec le torse de l'adversaire - jamais, seule la fugitive pulsion qui a traversé l'esprit de Zidane a été visible aux yeux des téléspectateurs du monde entier.*» [46]

1.2.3.4 PARADOXES ÉPISTÉMOLOGIQUES

Nombreux sont les paradoxes épistémologiques qui relèvent souvent d'une faiblesse de l'expérience.

L'école des Mégariques déjà faisait grand usage de ces arguments qui embarrassent le lecteur, mais l'incitent aussi à trouver la faille logique. Que ces

[45] Qui avait suggéré à celle-là d'accepter un tel défi?
[46] Jean-Philippe TOUSSAINT, *La Mélancolie de Zidane*, Paris, Les éditions de Minuit, 2006.

arguments n'étaient pas seulement destinés à désarçonner dialectiquement l'adversaire dans un débat, mais témoignent d'une recherche au niveau de la logique, est confirmé par leur importance dans l'émergence de la logique stoïcienne (qui correspond peu ou prou à la logique des propositions moderne).

Un de ces paradoxes est celui du «tas», le «**Sorite**» (du grec σωροζ = le tas):

> Supposons un *tas de sable* (composé de 675.821.349 grains de sable). Si nous enlevons 1 grain, nous aurons toujours un *tas de sable*. Si nous enlevons 2 grains, ce sera toujours un *tas*, de même pour 3, 4, etc. Et si nous enlevons 675.821.348 grains de sable, aurons-nous toujours un *tas*, composé en ce cas d'un seul grain de sable?

A première vue, le problème soulevé par l'argument est celui de l'imprécision de la définition du mot «tas». En effet, serions-nous capables de donner une définition de ce mot? Dire que c'est une «accumulation», une «grande quantité», un «ensemble» de choses[47], c'est opérer par synonymie et ne constitue pas une définition. Peut-être devrons-nous vivre avec de telles imprécisions des mots que nous utilisons et qui en fin de compte n'empêchent pas une communication correcte!

Nous sommes peut-être aussi fondamentalement incapables (de par nos facultés cognitives défaillantes) d'identifier le point limite où le *tas* change de nature et n'est plus ce qu'il était.

Mais ce paradoxe cache encore autre chose: un **sorite**[48] au sens logique du terme, à savoir un enchaînement de raisonnements (ou polysyllogisme[49]).

(1) Si 675.821.349 grains de sable sont un tas, alors 675.821.349 grains de sable moins un grain sont un tas.
(2) Si 675.821.348 grains de sable sont un tas, alors 675.821.348 grains de sable moins un grain sont un tas.
…
…
(n) Si 2 grains de sable sont un tas, alors 2 grains de sable moins un grain est un tas.

On pourrait d'ailleurs continuer par: Si 0 grains de sable sont un tas, alors 0 grains de sable moins un grain est un tas et ainsi de suite!

---

[47] Ce sont les termes repris dans le «Petit Larousse».
[48] Le sorite en logique porte précisément son nom à partir de ce paradoxe des mégariques!
[49] Il correspond à notre syllogisme hypothétique.

En fait, un sorite peut être parfaitement légitime, mais le raisonnement présent souffre d'une imprécision définitoire qui se transmet de prémisse en prémisse et s'aggrave même à chaque étape.

Le sorite est une forme de raisonnement très souvent utilisé dans la vie courante et beaucoup de nos connaissances reposent sur lui. Nous savons, par exemple, que les corbeaux sont des oiseaux; que les oiseaux sont des animaux et que tous les animaux ont besoin d'oxygène. Même sans jamais avoir fait l'expérience qu'un corbeau a besoin d'oxygène, nous savons que c'est le cas, en faisant ce raisonnement en cascade.
Mais le sorite peut aussi devenir très rapidement source d'erreur! Citons seulement ce sorite célèbre d'Aristote:

(1) Celui qui boit trop s'enivre,
(2) celui qui s'enivre dort bien,
(3) celui qui dort bien ne pèche pas,
(4) celui qui ne pèche pas est un saint,
(5) donc, celui qui boit trop est un saint.

L'erreur ici réside dans l'extension donnée à l'expression «ne pèche pas». Dans la ligne 3) il est clair *qu'on ne pèche pas en dormant*. Mais dans la ligne 4) nous avons un sens plus général, car *on est un saint si l'on ne pèche jamais*! Il y a donc une rupture de sens de la ligne 3) à la ligne 4) et donc le sorite n'est pas valide.

Les limites de l'expérience dans l'établissement de vérités générales sont soulignées dans ce qu'il est convenu d'appeler le paradoxe «**des corbeaux**».

Nous voulons vérifier la vérité de l'affirmation:
(C1) «tous les corbeaux sont noirs».

Nous nous mettons à la recherche des corbeaux pour voir s'ils sont noirs, sachant qu'un seul corbeau blanc, rouge ou mauve avec un bord jaune infirmerait l'énoncé universel. Bientôt nous réalisons que jamais nous ne serons en mesure de confirmer définitivement l'affirmation ou de l'infirmer.

En bons logiciens, nous savons que, par contraposition, l'affirmation «*tous les corbeaux sont noirs*» est logiquement équivalente à:
(C2) «tous les objets non-noirs sont des non-corbeaux»[50].
(il n'y a pas d'objet non-noir qui soit un corbeau)

[50] cf. 1.2.1.1.7 contraposition simple pour une [A].

Rien de plus facile que de vérifier ceci: voici un canari jaune, il est donc non-noir et pas un corbeau. Donc cet objet confirme (C2) qui est logiquement équivalent à (C1).

Donc, ce canari jaune confirme l'hypothèse que «tous les corbeaux sont noirs»! Et nous constatons qu'autour de nous, nous trouvons beaucoup plus d'objets non-noirs qui ne sont pas des corbeaux, que des objets noirs qui sont des corbeaux! Tout et n'importe quoi, à condition que ce ne soit pas noir, confirme que tous les corbeaux sont noirs. Conclusion assez paradoxale…

Plus pénible encore: l'existence de ce canari jaune confirme aussi:
(C3) «tous les objets non-rouges sont des non-corbeaux».

Or, par contraposition (C3) est équivalent à:
(C4) «tous les corbeaux sont rouges».

Ainsi donc, ce canari jaune est la confirmation à la fois de (C1) et de (C4), et on pourra affirmer que «*tous les corbeaux sont rouges et noirs*»!

La question qui se pose fondamentalement est si un énoncé concernant les corbeaux peut être vérifié par un quelconque autre objet.

Un problème épistémologique grave est soulevé ici. Pour le moins faudra-t-il admettre que la validité d'énoncés universels ne peut être garantie par induction (cf. Hume). Mais il faudra, en sus, s'interroger sur les moyens que nous avons pour confirmer ou infirmer une théorie. Tous les moyens ne pourront pas être les bons. Mais comment séparer les «bons moyens» des «mauvais»?

Même si, logiquement, le canari jaune est une confirmation supplémentaire que «*tous les corbeaux sont noirs*», il faut comprendre aussi que, ni l'existence de ce canari jaune, ni l'existence d'un corbeau noir ne **prouvent** l'universalité de (C1). Ils viennent soutenir la thèse, mais nous sentons que le corbeau noir est plus convaincant que le canari jaune ou une voiture bleue…

Les philosophes et les scientifiques n'ont pas fini de débattre de ces questions.

1.2.3.5 PARADOXES STATISTIQUES ET SCIENTIFIQUES

Ce genre de conclusions surprenantes n'a pas la force problématique des paradoxes précédents. Ils révèlent plus une faiblesse de nos connaissances et de notre esprit scientifique qu'un véritable problème logique ou sémantique.

Nombreux sont les problèmes statistiques dont les solutions nous semblent incompréhensibles et improbables. Ne citons que très rapidement l'exemple suivant:

> Des pièces de monnaie sont disposées dans trois boîtes identiques: (A) contient deux pièces en or, (B) une pièce en or et une en argent et (C) deux en argent. On retire une pièce d'une boîte et elle est en or. Quelle est la probabilité qu'elle sorte de (B)?

(C) ne contenant pas de pièce en or, on a tendance à l'estimer à 1/2 puisque seulement deux boîtes renferment une pièce en or.

Or, la probabilité est de 1/3. En effet, au départ, la probabilité de désigner (B) est de 1/3 et le fait qu'il y ait eu une pièce en or ne change pas cette probabilité!

La Physique est un autre domaine où foisonnent ce genre de problèmes à solutions très surprenantes et paradoxales au sens large du terme (mais aussi parfois très difficiles à prouver). On réfléchira à celui-ci:

> L'occupant d'un bateau qui flotte dans une piscine, jette une pièce d'un euro dans l'eau. Le niveau d'eau va-t-il (théoriquement) baisser, s'élever ou rester constant. Il va baisser!

Tant qu'elle reste à l'intérieur du bateau, la pièce va déplacer une quantité d'eau égale à son poids. Une fois dans l'eau elle va déplacer une quantité égale à son volume. Or, le poids spécifique d'une pièce métallique étant supérieur à celui de l'eau (et donc au poids de son volume en eau), le niveau de l'eau va baisser…

1.2.3.6 EVALUATION FINALE

A la fin de ce parcours nous nous rendons compte que les paradoxes peuvent soulever de graves problèmes touchant les systèmes (mathématiques), l'usage des termes «vrai», «faux», les langages et leur utilisation, les définitions, l'infini, le mouvement etc.

Toujours nous touchons à travers eux les limites, ou les possibles limites de notre raison. Ils nous interpellent et nous obligent à affiner notre langage, notre esprit logique, notre discernement. Ce sont des jeux très sérieux…



1.3 LOGIQUE DES PROPOSITIONS

1.3.1 Notation

Si la logique s'intéresse à la question de savoir si la conclusion peut être légitimement tirée des prémisses, elle doit alors s'intéresser d'abord à la *structure du raisonnement* et à la *structure de ses propositions* et moins au sens qu'ont les différentes propositions.

Ne s'intéressant pas au contenu des propositions, mais à leur structure, la logique a intérêt à symboliser les propositions utilisées.

Sans symbolisation, il devient en effet très difficile de relever et de dégager les structures des propositions, ou encore de calculer avec ces propositions, i.e. de les relier entre elles dans des raisonnements. Pour l'efficacité d'une symbolisation, il n'y a qu'à considérer l'exemple des mathématiques: «*25 : 2*» est plus facile à manier que «*vingt-cinq divisé par deux*». Imaginez votre livre de mathématiques écrit en langage naturel!

Nous appellerons *transcription* le fait de traduire une proposition d'un langage naturel dans un langage symbolique.

1.3.1.1 LES PROPOSITIONS

Considérons différents types de propositions:
«Le ciel est gris» exprime un sens élémentaire complet, est une phrase grammaticale complète et peut être vraie ou fausse.

De même:
«Tous les hommes sont mortels» exprime un sens élémentaire complet, est une phrase grammaticale complète et peut être vraie ou fausse.

On appelle ces énoncés des **propositions élémentaires.**

On symbolisera les propositions élémentaires par A, B, C, etc. c'est-à-dire par des lettres majuscules du début de l'alphabet où chaque lettre représentera toujours la même proposition élémentaire à l'intérieur d'un même raisonnement.

Par contre:
«*Il pleut et le ciel est gris*» exprime deux sens élémentaires complets: «Il pleut» et «Le ciel est gris» mais ces deux sens élémentaires sont *reliés par un lien logique* et la proposition entière prend un nouveau sens à travers ce lien «et».

Ces propositions composées sont appelées **propositions complexes**.

Un tel lien est appelé **connecteur** logique. C'est un **opérateur logique**, un symbole dont le sens reste constant dans les propositions alors que les propositions élémentaires elles-mêmes peuvent varier (on peut donc aussi parler d'une constante logique).

Les différentes propositions élémentaires (A, B, C etc.) sont les **arguments** de la proposition entière.

1.3.1.2 LES OPÉRATEURS LOGIQUES (CONNECTEURS)

Prenons les exemples suivants pour apprendre à distinguer entre propositions élémentaires et propositions complexes:

(1) La cuisine est bonne.
(2) Tous les loups sont méchants.
(3) Je ne viendrai pas ce soir.
(4) Les garagistes vendent et réparent des voitures.
(5) Je vais à Londres ou à Paris.
(6) Si tu as mal aux dents, alors il faut consulter un dentiste.
(7) De bonnes attractions attirent les touristes.
(8) Etre de mauvaise humeur revient à être grincheux.

Les propositions (1) à (3) semblent être des propositions élémentaires. Mais à partir de (3), si on les analyse à fond, les propositions sont en fait complexes.

Il faudrait les réécrire en utilisant les connecteurs suivants:

(3) «/ **Pas** / je viendrai». Cet opérateur logique n'est pas un connecteur, mais porte sur une seule proposition dont il modifie la valeur de vérité.
‘**non**’ est une *négation*, le symbole est $\overline{}$ et se note $\overline{A}$;

(4) «Les garagistes vendent des voitures / **et** / les garagistes réparent les voitures»
'**et**' est une *conjonction*, le symbole est $\wedge$ et se note $A \wedge B$;

(5) «Je vais à Londres / **ou** / je vais à Paris»
'**ou**' est une *disjonction*, le symbole est $\vee$ et se note $A \vee B$;

(6) «/ **Si** / tu as mal aux dents / **alors** / il faut consulter un dentiste»
‘**si…alors**’ est une *implication*, le symbole est $\rightarrow$ et se note $A \rightarrow B$;

(7) «/ **Si** / les attractions sont bonnes / **alors** / les touristes sont attirés»
‘**si…alors**’ est une *implication*, le symbole est $\rightarrow$ et se note $A \rightarrow B$;

(8) «Etre de mauvaise humeur / **équivalent à** / être grincheux»
'**équivalent à**' est une *équivalence*, le symbole est $\leftrightarrow$ et se note $A \leftrightarrow B$

1.3.1.3 LES SÉPARATEURS

Afin de séparer les propositions complexes contenues dans des structures plus complexes encore, il sera utile d'utiliser (comme en mathématiques) des parenthèses **(…)**, des crochets **[…]**, des accolades **{…}** dans cet ordre de croissance.

1.3.1.4 LA CONCLUSION

La conclusion d'un raisonnement est généralement introduite en langage courant par «donc». En logique ce «donc» sera symbolisé par: $\vdash$ [51].

Remarques finales:

Nous remarquons que l'utilisation correcte des opérateurs demande une grande attention et doit se faire soigneusement.

Les symboles utilisés constituent des conventions. Ils pourraient être différents et de fait il y a d'autres notations possibles qu'on retrouve dans les traités de logique.

> **Afin de garantir une communication correcte et simple, on s'en tiendra à la notation proposée ci-dessus.**

1.3.1.5 LES SYMBOLES DU MÉTALANGAGE

Lorsque nous établirons les règles générales qui sont à la base de notre système logique, nous serons amenés à parler indifféremment de propositions élémentaires et de propositions complexes. En fait, nous parlerons donc de notre langage logique et nous emploierons un métalangage qui s'en distingue.

La métalangue que nous utiliserons sera réduite aux symboles **p; q; r; s** etc. qui représentent:

- des *propositions élémentaires* A; B; C etc.
- aussi bien que des *propositions élémentaires niées* $\overline{A}$; $\overline{B}$; $\overline{C}$ etc.
- aussi bien que des *propositions complexes* du type $A \rightarrow B$, ou encore $C \wedge (D \leftrightarrow \overline{Q})$, ou plus complexes encore[52].

Pour simplifier l'exposition nous garderons dans notre métalangage les opérateurs de notre système logique avec leur signification.

Nous utiliserons encore $\Leftrightarrow$ pour indiquer que deux expressions du métalangage sont équivalentes[53].

---

[51] Dénomination en mathématiques: *vdash*.
[52] Deux symboles du métalangage pourraient aussi représenter **la même** proposition!
[53] En fait, parlant du métalangage, $\Leftrightarrow$ serait le symbole d'un méta-métalangage!

1.3.1.6 TERMES TECHNIQUES

1.3.1.6.1 Table de vérité

Elle donne la valeur de vérité des propositions complexes à partir des valeurs de vérité des propositions élémentaires qui la composent.

1.3.1.6.2 Règle des arbres

Elle permet de retrouver les valeurs de vérité des propositions élémentaires à partir de la valeur de vérité des propositions complexes.

1.3.1.6.3 Règle de déduction

On appellera règle de déduction tout schéma de raisonnement permettant de passer correctement de prémisses données à une conclusion (RD).

1.3.1.6.4 Loi logique

On appellera loi logique toute proposition complexe qui reste vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions élémentaires qui la composent. On dira alors que la proposition est *tautologique*.

Cette caractéristique d'être toujours vraie ne dépendant pas du contenu de la proposition (des propositions élémentaires), doit donc dépendre de la seule forme de la proposition, donc de sa structure.

Tout raisonnement valide écrit sous forme d'implication associée est tautologique[54]. De même, toute équivalence entre deux formules ayant les mêmes valeurs de vérité est tautologique et peut donc être appelée loi logique (LL).

1.3.1.6.5 Table synoptique

Les tables synoptiques ci-dessous montrent les liens profonds et nécessaires entre les tables de vérité des connecteurs et les règles des arbres ainsi que les règles de déduction[55].

Ceci montre que ces règles ne sont pas des inventions, mais découlent de façon contraignante des définitions données à travers les tables des connecteurs. Il est clair que d'autres définitions impliqueraient d'autres règles.

---

[54] cf. exemple sub 2.4.1.1

[55] Le lien avec certaines lois logiques ne peut pas ressortir d'une table simple à deux valeurs, mais nécessiterait des tables plus complexes.

1.3.2 Sens des operateurs

Le sens exact des opérateurs deviendra manifeste par la valeur de vérité qu'ils donneront aux énoncés tombant sous leur champ d'application. Une proposition de notre système ne pouvant être que vraie ou fausse, on utilisera les symboles 1 pour «vrai» et 0 pour «faux».

1.3.2.1 LA NÉGATION

On admettra que si une proposition élémentaire quelconque p est vraie, l'adjonction de la négation rend p faux.

Ceci vaut aussi pour une proposition complexe qui peut bien entendu aussi être niée en bloc.

1.3.2.1.1 Table de vérité

Le sens de la négation peut être représenté par la table de vérité suivante:

	p	$\bar{p}$
1	1	0
2	0	1

1.3.2.1.2 Interprétation sémantique (règles des arbres)

Si une proposition $\bar{\bar{p}}$ est vraie, ceci signifie que p est vrai, ce que l'on schématisera par:

$\bar{\bar{p}}$ [est vrai]
|
p [est vrai]

1.3.2.1.3 Loi logique

Si une proposition $\bar{\bar{p}}$ est donnée, je peux la remplacer par p, ou inversement.

$\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$ (loi de la double négation; **DN**)

1.3.2.1.4 Lecture

$\bar{p}$ se lit: 'non-p'; 'pas de p'; 'p est faux'; 'il est faux que p soit', 'il n'est pas vrai que p soit'...

1.3.2.2 LA CONJONCTION

«*Jean dort et Julie fait le ménage*» est une proposition complexe. Quand est-ce qu'on peut dire que cette proposition complexe *dans son ensemble* est vraie? On admettra facilement que c'est uniquement dans le cas où l'on a *à la fois* la vérité des deux propositions élémentaires:
«Jean dort» / «Julie fait le ménage»

1.3.2.2.1 Table de vérité

Etant donné que p peut être vrai ou faux, mais que q peut aussi être vrai ou faux, quatre combinaisons sont théoriquement possibles. Ceci nous donne la table de vérité suivante:

	p	q	$p \wedge q$
1	1	1	1
2	1	0	0
3	0	1	0
4	0	0	0

Il est clair que seule la première ligne reprend la situation pour laquelle nous admettons que la proposition complexe dans son ensemble est vraie.

1.3.2.2.2 Interprétation sémantique (règles des arbres)

Cette définition va nous intéresser lorsque nous voudrons vérifier la validité d'un raisonnement par la ***«méthode des arbres».*** Nous avons vu que l'on admettra toujours que dans un raisonnement les prémisses sont vraies[56]. Si nous avons donc comme prémisse une *conjonction*, on pourra en déduire, puisqu'elle est supposée être vraie, *que p est vrai et que q est vrai.*

[Interprétation ligne1]



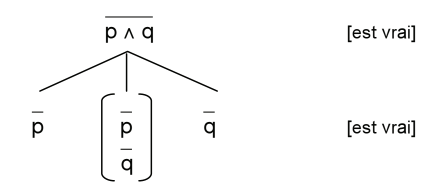
Par contre, si une prémisse nous dit qu'une conjonction est fausse (= est niée = $\overline{p \wedge q}$), ceci signifiera que l'une ou l'autre des trois autres lignes de la table de vérité est le cas. Or, pour avoir la fausseté d'une conjonction, il suffit que l'un des deux termes (p ou q) soit faux (ce qui est vrai aussi dans le cas de figure où les deux sont faux à la fois).

---

[56] cf. 1.1.2.1

On admettra donc que s'il est vrai (comme la prémisse le dit) qu'une conjonction est fausse [$\overline{p \wedge q}$], alors il est vrai aussi que l'un OU l'autre membre est faux (il faut donc envisager deux cas possibles).

[Interprétation lignes 2,3,4]



Les branches de gauche et de droite rendent compte des lignes 3, respectivement 2.

La branche du milieu, correspondant à la ligne 4, peut être négligée, car si la branche gauche ou la branche droite produit une contradiction, la branche du milieu en produit une nécessairement. Par contre, si l'une des branches (gauche ou droite) reste ouverte, le raisonnement est invalide indépendamment de ce qui se passe pour la branche au milieu.

1.3.2.2.3 Lois logiques & règles de déduction

Si la conjonction d'une proposition avec elle-même est affirmée, je peux remplacer la conjonction par la seule proposition, ou inversement:
$p \wedge p \Leftrightarrow p$ (loi de la tautologie **Taut**)

L'ordre des propositions dans une conjonction ne change pas le sens de cette proposition:
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (loi de la commutativité; **Com**) [57].

Les termes de plusieurs conjonctions peuvent être regroupés librement sans altérer le sens de l'expression:
$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge q \wedge r$ (loi de l'associativité; **Ass**).

La conjonction d'une expression avec une disjonction peut être remplacée par une disjonction de deux conjonctions ou inversement:
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (loi de la distributivité; **Dis**) [58].

---

[57] Un petit farceur dirait que la logique ne fait pas de différence entre: «il est mort et a été enterré» et «il a été enterré et est mort»...

[58] On apprend à l'école primaire que le périmètre d'un rectangle est égal à 2 x (longueur + largeur) qui équivaut à (2 x longueur) + (2 x largeur).

Une conjonction peut être remplacée par la négation d'une disjonction avec les deux termes niés ou inversement, ce qui correspond aux trois dernières lignes de la table de vérité de la conjonction (qui excluent que l'un **ou** l'autre des deux termes soient faux):

$p \wedge q \Leftrightarrow \overline{\overline{p} \vee \overline{q}}$ (loi de De Morgan; **DM**)

Si deux propositions sont vraies séparément, alors je peux dire que leur conjonction est également vraie (ligne 1 du tableau):

$p; q \vdash p \wedge q$ (règle de déduction de la conjonction; **Conj**).

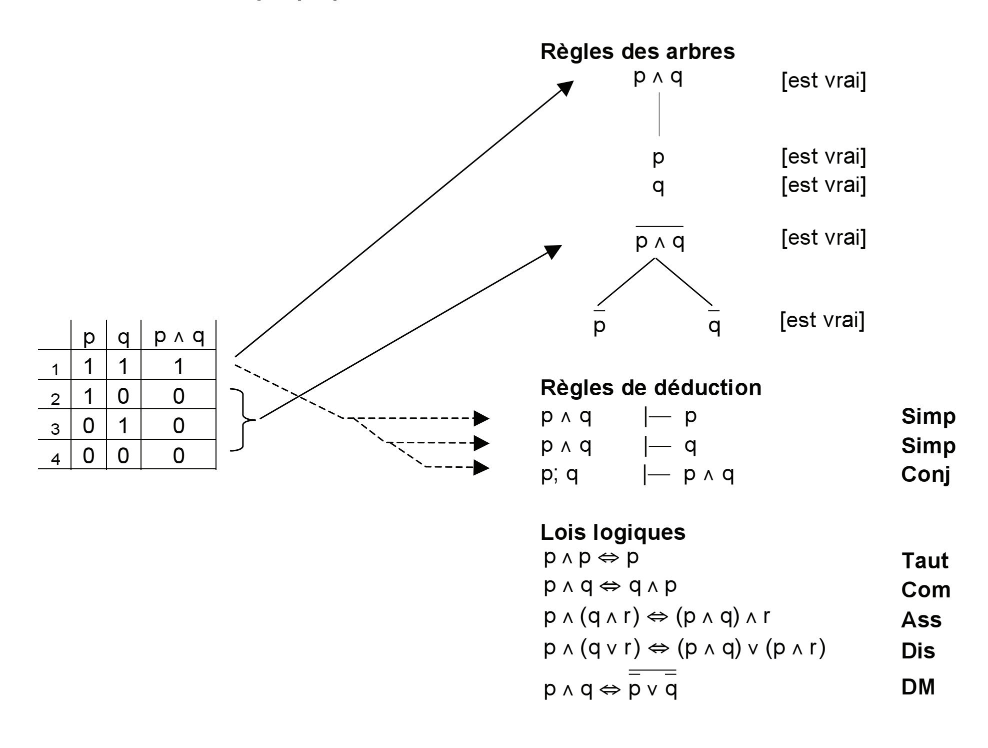
Inversement, si une conjonction est vraie, je peux en déduire que chacune des deux propositions est vraie:

$p \wedge q \vdash p$ et $p \wedge q \vdash q$ (règle de la simplification; **Simp**).

1.3.2.2.4 Lecture

$p \wedge q$ se lit ' p et q'; 'p mais aussi q'; 'non seulement p mais aussi q'; 'p alors que q'; 'p bien que q'; 'p quoique q'; 'p en plus de q' ; 'p + *participe présent ou gérondif exprimant une simultanéité*' [ex.: Il restait à la maison, ne faisant rien] etc.

1.3.2.2.5 Table synoptique



1.3.2.3 LA DISJONCTION

«*Je vais à Londres ou à Paris*» est une proposition complexe ... et compliquée. Car, qu'est-ce que je veux dire au juste? En effet, il y a différents sens du mot «**ou**» dans la langue naturelle.

«*Les élèves de première étudient le français ou l'anglais*» signifie: au moins l'une des deux langues. La proposition est vraie s'ils étudient le français, l'anglais *ou les deux langues à la fois*. C'est là le sens **inclusif** de ou.

«*Vous prenez du thé ou du café*» signifie: vous prenez soit...soit, mais pas les deux à la fois (en supposant qu'on parle d'une seule et même tasse…). Il s'agit du sens **exclusif** de ou.

Pour limiter le nombre des connecteurs, nous utiliserons le connecteur dans son sens inclusif (parce que plus large).

1.3.2.3.1 Table de vérité

Le sens inclusif de la disjonction est donné par la table suivante:

	p	q	p v q
1	1	1	1
2	1	0	1
3	0	1	1
4	0	0	0

Le sens exclusif (<u>que nous n'allons donc pas retenir</u>) serait rendu par la table suivante:

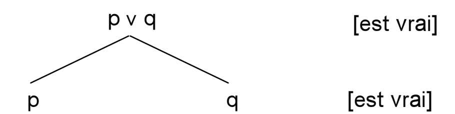
	p	q	p w q
1	1	1	0
2	1	0	1
3	0	1	1
4	0	0	0

1.3.2.3.2 Interprétation sémantique (règles des arbres)

Dans un raisonnement, on admet que les prémisses sont vraies. Si la prémisse est une disjonction, les trois premières lignes de la table sont à considérer.

On pourra dire que la proposition entière est vraie, si l'une au moins des deux propositions élémentaires est vraie. Ou encore *qu'il suffit que l'une ou l'autre des deux soit vraie.* Si la proposition complexe est vraie, alors on peut en tirer l'alternative:

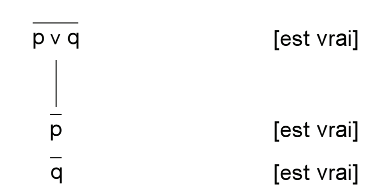
[Interprétation lignes 1,2,3]



Ici encore, il est inutile de rendre compte de la ligne 1 redondante, s'il suffit que 2 ou 3 soit le cas pour que la disjonction soit vraie.

Par contre, si une prémisse nous dit qu'il est vrai qu'une disjonction est fausse [$\overline{p \vee q}$], alors il nous faudra considérer la quatrième ligne de la table qui dit que pour avoir la fausseté d'une disjonction, il faut que les deux propositions élémentaires soient fausses à la fois.

[Interprétation ligne 4]



1.3.2.3.3 Lois logiques & règles de déduction

Si la disjonction d'une proposition avec elle-même est affirmée, je peux remplacer la disjonction par la seule proposition, ou inversement:

$p \vee p \Leftrightarrow p$ (loi de la tautologie; **Taut**)

L'ordre des propositions dans une disjonction ne change pas le sens de cette proposition:

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (loi de la commutativité; **Com**).

Les termes de plusieurs disjonctions peuvent être regroupés librement sans altérer le sens de l'expression:

$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee q \vee r$ (loi de l'associativité; **Ass**).

La disjonction d'une expression avec une conjonction peut être remplacée par la conjonction de deux disjonctions, ou inversement:

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (loi de la distributivité; **Dis**).

Une disjonction peut être remplacée par la négation d'une conjonction avec les deux termes niés (par *la ligne 4 qui exclut que les deux termes soient faux à la fois*), ou inversement:

$p \vee q \Leftrightarrow \overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}$ (loi de De Morgan; **DM**).

Si une proposition est vraie, on peut en déduire que n'importe quelle disjonction dont elle fait partie est vraie, puisqu'il suffit qu'un terme soit vrai pour qu'une disjonction soit vraie (*lignes 1,2,3*):
$p \vdash p \vee q$ (règle de l'addition; **Add**)[59].

Si une disjonction est vraie et qu'un de ses termes soit faux, alors je peux en déduire que l'autre terme doit être vrai puisqu'un des termes au moins doit être vrai pour que la disjonction entière soit vraie (*ligne 2*):
$p \vee q; \overline{q} \vdash p$ et $p \vee q; \overline{p} \vdash q$ (règle du syllogisme disjonctif; **SD**).

1.3.2.3.4 Lecture

$p \vee q$ se lit 'p ou q', 'ou bien p ou bien q' [*exprime le sens exclusif, mais que nous ignorons ici*], 'p à moins que q'; 'p sauf q'.

Remarque à propos de: à moins que (ne)...

L'expression «*à moins que*» est identique à «*à moins que ne*». Le «*ne*» de «*à moins que ne*» **est purement stylistique et ne constitue pas une négation**. L'expression «*à moins que ne…**pas***» est par contre une négation.

Cette expression peut aussi être sujette à des interprétations très diverses. En fait, il s'agit, selon le contexte, tantôt d'un *«ou exclusif»* (qu'on pourrait symboliser par une équivalence niée $\overline{p \leftrightarrow q}$) tantôt d'un *«ou inclusif»*.

Pour des raisons de facilité, on s'en tiendra là encore à une interprétation minimaliste et on symbolisera par une disjonction [qui peut être interprétée comme une condition nécessaire]. Il est entendu que la transcription par équivalence niée $\overline{p \leftrightarrow q}$ (« ou exclusif ») est acceptée aussi.

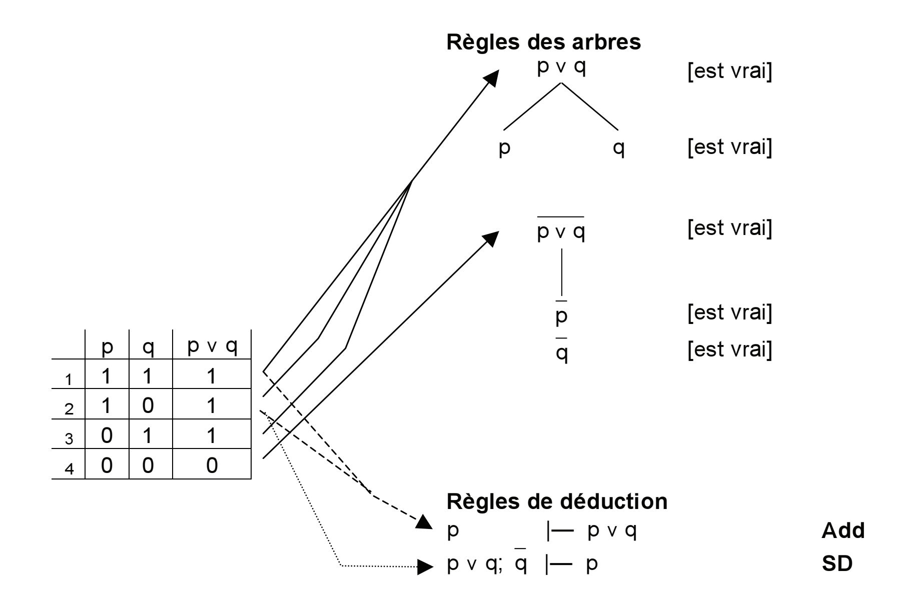
«Nos ressources naturelles seront bientôt épuisées (A), à moins que nous [ne] recyclions plus de matériaux (B)» s'écrira:
$A \vee B \Leftrightarrow \overline{A} \rightarrow B$[60] [qui peut se lire : B est la condition nécessaire de $\overline{A}$]

«Il assistera à la réunion (A), à moins qu'il ne soit pas de retour (B)» s'écrira:
$A \vee \overline{B}$

---

[59] En fait, la conclusion est plus faible que la prémisse quoiqu'elle semble exprimer plus!
[60] cf. «implication» (liste des LL en annexe).

1.3.2.3.5 Table synoptique



	p	q	p ∨ q
1	1	1	1
2	1	0	1
3	0	1	1
4	0	0	0

Lois logiques

$p \vee p \Leftrightarrow p$	**Taut**
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	**Comm**
$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	**Ass**
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	**Dis**
$p \vee q \Leftrightarrow \overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}$	**DM**

1.3.2.4 L'IMPLICATION (LA CONDITIONNELLE)

Par *implication* nous entendons une proposition hypothétique (conditionnelle) de la forme 'si ... alors' dans laquelle le «si» relie un *antécédent* (exprimant la condition) à un *conséquent* (exprimant l'élément relié à la condition) introduit par «alors».

La relation «si ... alors» a une multitude de significations.

Prenons un raisonnement:
«Si tous les chats aiment le foie et si Garfield est un chat, alors Garfield aime le foie.»

Le conséquent «Garfield aime le foie» découle **logiquement**, donc de façon contraignante, des prémisses (supposées vraies).

Autre exemple:
«Si une figure géométrique est un triangle, alors elle a trois côtés.»

Le conséquent ici reprend une propriété qui découle de manière toute aussi contraignante de la définition même du triangle, c'est-à-dire de l'antécédent. Nous avons fait **l'analyse** du terme 'triangle'.

Considérons maintenant ceci:
«Si l'on place du sucre dans de l'eau, alors le sucre se dissout.»

C'est une proposition pour laquelle seule l'**expérience** ou l'**observation** peut nous apprendre qu'il existe un lien entre le conséquent et l'antécédent. Aucun lien logique ou analytique ne relie le conséquent à l'antécédent. Il semble y avoir ici un *sens minimal* de l'expression «si ... alors» et c'est le sens dans lequel nous allons employer ces termes.

Ce qu'on veut exprimer par cette proposition, c'est l'expérience vécue que:
«il est faux que du sucre soit placé dans l'eau et qu'il ne se dissolve pas»,
ce que l'on symbolise $\overline{A \wedge \overline{B}}$, sens qui sera repris par la ligne 2 du tableau.

1.3.2.4.1 Table de vérité

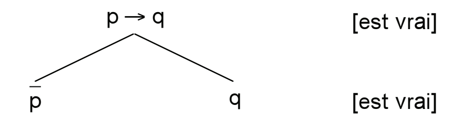
Une implication avec un antécédent vrai (le sucre placé dans l'eau) et un conséquent faux (puisque le sucre ne se serait pas dissout) serait donc considérée comme fausse. Le sens minimal est rendu par la table de vérité suivante:

	p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1	1
2	1	0	0
3	0	1	1
4	0	0	1

1.3.2.4.2 Interprétation sémantique (règles des arbres)

Si une implication est posée comme vraie, alors nous pouvons conclure à la fausseté de l'antécédent ou la vérité du conséquent (lignes 3 et 4 resp. 1 et 3 [ce dernier cas est donc redondant]):

[Interprétation lignes 1,3,4]



Par contre, si la prémisse affirme la fausseté d'une implication [$\overline{p \rightarrow q}$] on saura qu'à la fois l'antécédent est vrai et le conséquent faux:

[Interprétation ligne 2]



1.3.2.4.3 Lois logiques & règles de déduction

L'implication d'une expression avec une conjonction peut être remplacée par la conjonction de deux implications, ou inversement:
$p \rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ (loi de la distributivité; **Dis**).

L'implication d'une expression avec une disjonction peut être remplacée par la disjonction de deux implications, ou inversement:
$p \rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ (loi de la distributivité; **Dis**).

Une disjonction impliquant une expression peut être remplacée par la conjonction de deux implications, ou inversement:
$(p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ (loi de la distributivité; **Dis**).

Une conjonction impliquant une expression peut être remplacée par la disjonction de deux implications ou inversement:
$(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ (loi de la distributivité; **Dis**).

Une implication peut être remplacée par une disjonction avec l'antécédent nié, ou inversement:
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$ (loi de l'implication; **Imp**)

Une implication niée peut être remplacée par une conjonction avec le conséquent nié, ou inversement:
$\overline{p \rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$ (loi de l'implication niée; **Ne.Imp**)

Les deux termes d'une implication peuvent être échangés en les niant tous les deux, ou inversement:
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \overline{q} \rightarrow \overline{p}$ (loi de la contraposition; **Cont**)

Si dans une implication il y a une double condition, alors si la première est donnée, alors si la deuxième est donnée aussi, le conséquent est aussi, ou inversement:
$(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$ (loi de l'exportation; **Exp**)

Si une implication et son antécédent sont vrais, alors il s'ensuit que le conséquent doit être vrai (*la ligne 2 excluant toute autre possibilité*):
$p \rightarrow q;\ p \vdash q$ (règle du modus ponens; **MP**).

Si une implication est vraie et que son conséquent est faux, alors il faut que l'antécédent soit faux aussi (*ligne 2*):
$p \rightarrow q;\ \overline{q} \vdash \overline{p}$ (règle du modus tollens; **MT**).

Deux implications peuvent être réduites en une seule si le conséquent de l'une est l'antécédent de l'autre:
$p \rightarrow q;\ q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$ (règle du syllogisme hypothétique; **SH**).

1.3.2.4.4 Lecture

$p \rightarrow q$ peut être exprimé de beaucoup de manières différentes dans le langage courant p.ex. 'p implique q'; 'si p, alors q'; 'p est une condition suffisante pour que q'; 'p à condition que'; 'au cas où p, alors q'; 'pas de p sans q'; 'pourvu que p, alors q'; 'q condition nécessaire de p' ...

Dans le langage courant, ces tournures sont parfois inversées: «je viendrai pourvu qu'il fasse beau» doit donc être interprété (et traduit) par «s'il fait beau, alors je viendrai».

1.3.2.4.5 Condition suffisante, nécessaire, nécessaire et suffisante

- Condition **suffisante** *(CS)*:

«Il suffit que p soit, pour que q soit» ne signifie pas que p doit nécessairement être vrai, q peut aussi être vrai alors que p est faux [ligne 4], mais on veut exclure que p soit vrai et que q ne soit pas vrai,

$$\overline{p \wedge \overline{q}}$$

qu'on peut symboliser par: $p \rightarrow q$.

Exemple:

«*S'il fait beau, je vais au bois*» contient une condition très faible et signifie: «il n'est pas vrai qu'il fasse beau et que je n'aille pas au bois» ... «qu'il fasse beau, c'est sûr, j'irai au bois»... etc. Par là il n'est ***pas exclu*** que j'aille au bois sans qu'il fasse beau!

On symbolisera donc:
«il fait beau» = A; «je vais au bois» = B

«S'il fait beau, je vais au bois» = $A \rightarrow B$

- Condition **nécessaire** *(CN)*:

si p est une condition nécessaire pour que q soit, alors on veut dire par là qu'on veut précisément exclure le cas que p soit faux et que q soit vrai

$$\overline{\overline{p} \wedge q}$$

qu'on peut symboliser par: $q \rightarrow p$[61]

preuve:

	p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge q$	$\overline{\overline{p} \wedge q}$	$q \rightarrow p$	$\overline{p} \rightarrow \overline{q}$
1	1	1	0	0	0	1	1	1
2	1	0	0	1	0	1	1	1
3	0	1	1	0	1	0	0	0
4	0	0	1	1	0	1	1	1

(les distributions des valeurs de vérités pour les deux expressions étant identiques, celles-ci sont donc équivalentes et l'on peut remplacer l'une par l'autre)

[61] cf. «commutativité» et «implication niée» (liste des LL en annexe).

«***Seulement** s'il fait beau, alors j'irai au bois*» est beaucoup plus fort que «*s'il fait beau, je vais au bois*». On veut exclure que j'aille au bois alors qu'il ne fait pas beau (ce qui reste précisément possible dans le cas de la condition suffisante). La ligne 3, dernière colonne de la table ci-dessus, rend compte de cette exigence.

On symbolisera donc:
«il fait beau» = A; «je vais au bois» = B

«Seulement s'il fait beau je vais au bois» = $B \rightarrow A$

ce qui peut aussi se lire: *«Si je vais au bois, c'est qu'il fait beau»*

*«**Seulement** s'il fait beau, alors j'irai au bois»* peut aussi se lire: «s'il ne fait pas beau, alors je n'irai pas au bois» = $\overline{A} \rightarrow \overline{B}$. Par contraposition[62] $\overline{A} \rightarrow \overline{B} \Leftrightarrow B \rightarrow A$. Ceci est démontré par la dernière colonne du tableau ci-dessus.

La condition nécessaire se reconnaît à des expressions telles que: «**seulement**» ... «**uniquement** si ... alors»; «pour que ... **il faut** que» ...etc. où la condition est renforcée.

«p **n'est que** si q est» peut selon les cas être une équivalence, mais est toujours au moins une condition nécessaire.

- Condition **nécessaire et suffisante** *(CNS)*:

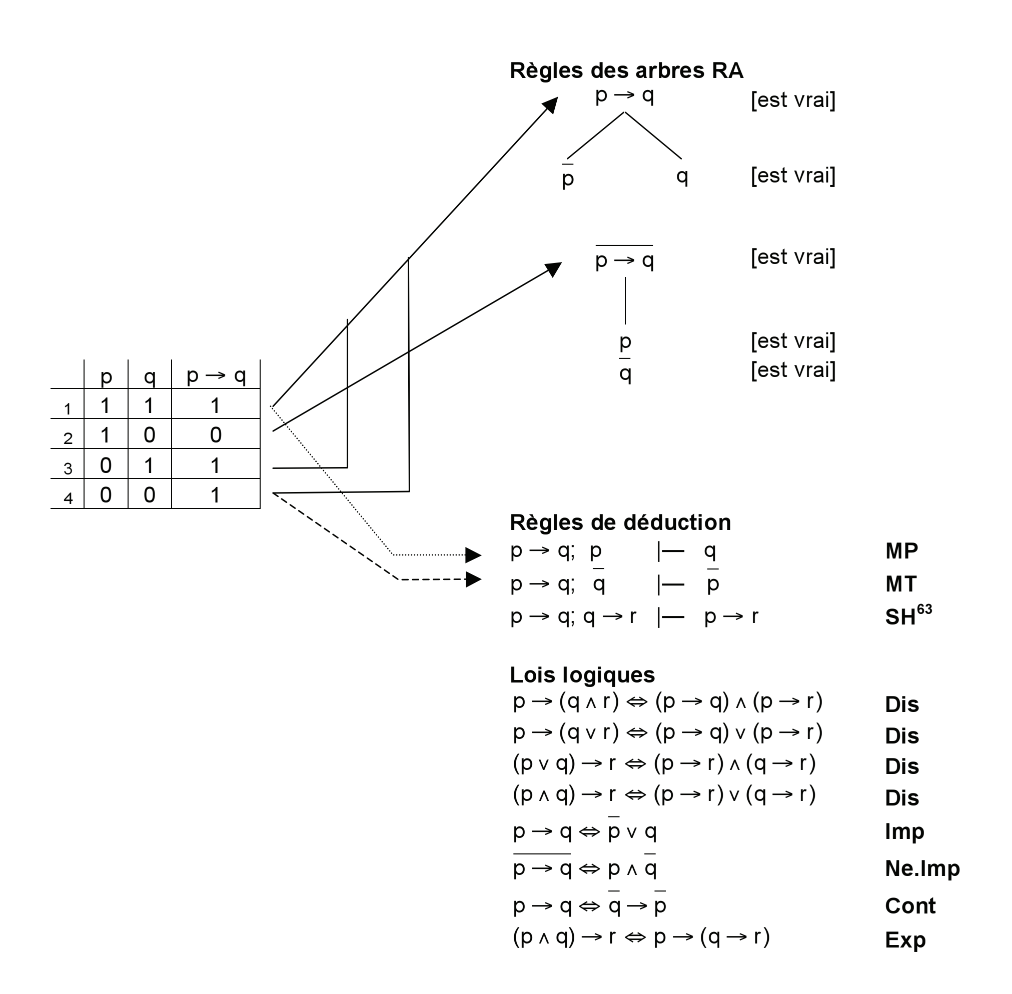
cf. sub «équivalence»

Démarche pratique...
pour déterminer de quelle condition il s'agit:

- identifier ce qui est la condition de quoi,
- se demander si la condition est-elle simple ou renforcée,
- si elle est **simple** ⇒ condition suffisante ⇒ la condition est **l'antécédent** dans l'implication,
- si elle est **renforcée** ⇒ condition nécessaire ⇒ la condition est le **conséquent** dans l'implication.

[62] cf. «contraposition» (liste des LL en annexe).

1.3.2.4.6 Table synoptique



	p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1	1
2	1	0	0
3	0	1	1
4	0	0	1

[63] Le SH ne peut être justifié au moyen de la table puisqu'il repose sur trois termes et nécessiterait donc une table à huit lignes.

1.3.2.5 L'ÉQUIVALENCE

«*On s'enivre si et seulement si on boit trop d'alcool*» signifie aussi bien «si on boit trop d'alcool, on s'enivre » que «si on est ivre, on a bu trop d'alcool».

On admettra que cette proposition est fausse si ou bien on est ivre et qu'on n'a pas bu trop d'alcool; ou bien si on a bu trop d'alcool et qu'on n'est pas ivre.

1.3.2.5.1 Table de vérité

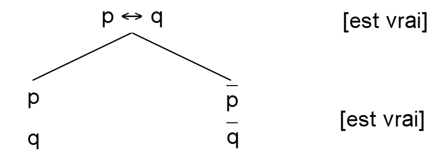
Comme l'*équivalence* signifie littéralement que les deux termes de l'expression ont *même valeur*, on admettra:

	p	q	p ↔ q
1	1	1	1
2	1	0	0
3	0	1	0
4	0	0	1

1.3.2.5.2 Interprétation sémantique (règles des arbres)

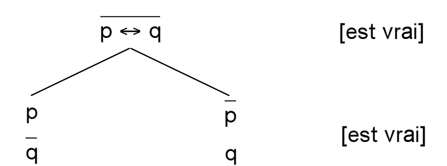
Si une équivalence est posée comme étant vraie, alors nous devons considérer les lignes 1 et 4 de la table. Elles nous montrent que dans ce cas les deux termes sont ou bien *à la fois* vrais ou bien *à la fois* faux (lignes 1 et 4 de la table).

[Interprétation lignes 1,4]



Par contre, si l'on affirme que la négation d'une équivalence est vraie, alors il faudra considérer les lignes 2 et 3 de la table et nous pouvons en tirer que ou bien le premier terme est vrai **et** le deuxième faux, *ou alors* que le premier est faux **et** le deuxième est vrai.

[Interprétation lignes 2,3]



1.3.2.5.3 Lois logiques & règles de déduction

L'équivalence de deux termes peut être remplacée par la conjonction de deux implications inverses, ou inversement:

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (loi de l'équivalence; **Eq**).

L'équivalence signifiant l'identité de la valeur des deux termes, elle peut être remplacée par la disjonction de deux conjonctions à valeurs inversées des deux termes, ou inversement:

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$ (loi de l'équivalence; **Eq**).

1.3.2.5.4 Lecture

$p \leftrightarrow q$ se lit ' p est équivalent à q'; 'p est une condition nécessaire et suffisante'; 'p si et seulement si q'; 'il faut et il suffit que p pour que q'; 'p précisément si q' etc.

' p n'est que si q est ' peut, selon les cas, être une équivalence, mais est toujours au moins une condition nécessaire.

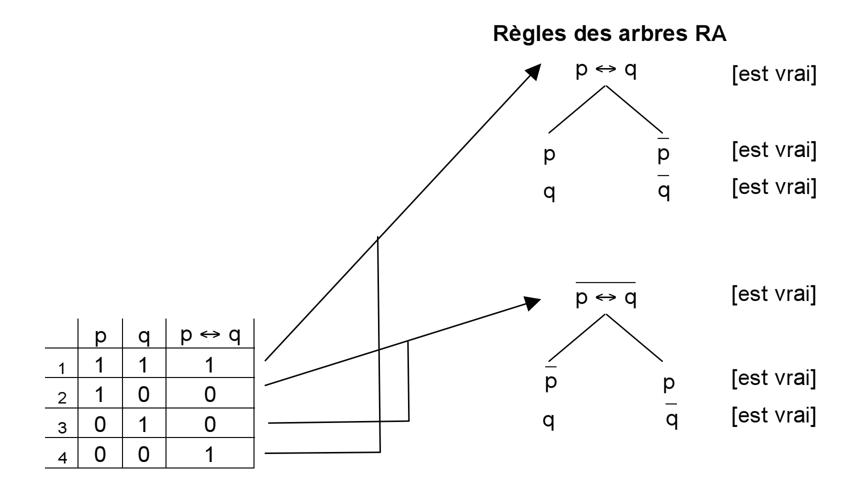
1.3.2.5.5 Condition nécessaire et suffisante

La condition nécessaire et suffisante se reconnaît au fait qu'on peut la décomposer en deux implications inverses. «*Un nombre entier est divisible par deux dans l'ensemble des entiers naturels (ℕ), si et seulement s'il est pair*» signifie aussi bien «*si un nombre entier est divisible par deux dans ℕ, alors il est pair*» que «*si un nombre est pair, alors il est divisible par deux dans ℕ*».

On symbolisera donc:
«être divisible par deux dans ℕ» = A; «être pair» = B

«Un nombre entier est divisible par deux dans ℕ si et seulement s'il est pair»
= $A \leftrightarrow B$

1.3.2.5.6 Table synoptique



	p	q	p ↔ q
1	1	1	1
2	1	0	0
3	0	1	0
4	0	0	1

Règles de déduction
Cf. plus haut

Lois logiques

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ **Equiv**

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\bar p \wedge \bar q)$ **Equiv**

1.3.2.6 REMARQUE À PROPOS DU MÉTALANGAGE

Toutes les règles de déduction et lois logiques sont présentées dans un métalangage dont les symboles (p, q, r …) peuvent représenter des propositions élémentaires ou des propositions complexes[64].

Ceci pourra éventuellement être troublant dans un premier temps. Prenons l'exemple de la loi de De Morgan: $p \wedge q \Leftrightarrow \overline{\bar p \vee \bar q}$. Elle pourrait donner lieu aux équivalences suivantes:

$A \wedge B \Leftrightarrow \overline{\bar A \vee \bar B}$ et par négation du schéma: $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar A \vee \bar B$

$\bar A \wedge B \Leftrightarrow \overline{A \vee \bar B}$ $\overline{\bar A \wedge B} \Leftrightarrow A \vee \bar B$

$A \wedge \bar B \Leftrightarrow \overline{\bar A \vee B}$ $\overline{A \wedge \bar B} \Leftrightarrow \bar A \vee B$

$\bar A \wedge \bar B \Leftrightarrow \overline{A \vee B}$ $\overline{\bar A \wedge \bar B} \Leftrightarrow A \vee B$

---

[64] cf. 1.3.1.5

Attention!

Les règles des arbres, les lois logiques et les règles de déduction sont toutes énoncées dans le métalangage et représentent donc des structures générales, c'est-à-dire des schémas sous-jacents aux expressions du langage.

Ainsi la structure sous-jacente à

$$\underbrace{[\overline{C \rightarrow B} \vee (A \wedge C)]}_{p} \rightarrow \underbrace{(C \wedge D)}_{q}$$

est $p \rightarrow q$[65]

1.3.2.7 REMARQUE À PROPOS DE LA NÉGATION

Des remarques ci-dessus il ressort que:

$\overline{A} \wedge \overline{B}$ est équivalent à $\overline{A \vee B}$

et n'est donc pas équivalent à $\overline{A \wedge B}$ qui est équivalent à $\overline{A} \vee \overline{B}$.

Sinon il faudrait admettre que $\overline{A} \wedge \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$!

Attention!

De manière générale on retiendra que dans l'expression $\overline{p \wedge q}$ (et ceci vaut pour tous les connecteurs) la négation porte sur le connecteur. C'est le **lien logique** entre p et q qui est nié.

Dans une expression de type $\overline{p} \wedge \overline{q}$ (et ceci vaut pour tous les connecteurs) la négation porte sur les **propositions** reliées par le lien.

---

65 …où il est entendu que p et q représentent à leur tour deux autres structures encore.

INTRODUCTIONS

1.3.2.8 TABLE GÉNÉRALE DES CONNECTEURS

A titre indicatif voici le tableau de toutes les combinaisons possibles pour deux termes à deux valeurs de vérité:

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
p	q	taut	p∨q	rép	//	p→q	//	p↔q	p∧q	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p \leftrightarrow q}$	//	$\overline{p \rightarrow q}$	//	$\overline{\text{rép}}$	$\overline{p \vee q}$	cont
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Nous remarquons que les colonnes de 9 à 16 sont les négations de 8 à 1 respectivement. Elles sont donc inutiles puisque nous avons introduit la négation.

Ainsi les colonnes 9, 10, 12 et 15 sont les négations respectivement de 8, 7, 5 et 2 qui correspondent aux connecteurs que nous avons introduits.

Certaines autres combinaisons sont sans objet: 4 donne les valeurs de p; 6 celles de q (13 et 11 en sont les négations).

Reste 1 qui exprime que la formule est vraie quelles que soient les valeurs de p et de q. On parle alors d'une tautologie. Ceci est les cas pour les lois logiques (cf. ci-dessous). 16 exprime la contradiction (antilogie).

La colonne 3 (et sa négation 14) exprime la «réplication» p ← q et signifie «q seulement si p». On aura compris qu'il s'agit d'un symbole pour exprimer la condition nécessaire. Comme nous avons un moyen pour exprimer la condition nécessaire par la seule «implication», la «réplication» est superflue.

Le choix de nos connecteurs est donc judicieux et recouvre en pratique (avec la négation) toutes les combinaisons possibles de valeurs pour deux termes.

Signalons encore qu'on pourrait écrire toutes les expressions de notre système à l'aide d'un seul connecteur (∧, ∨, →) et la négation[66]!

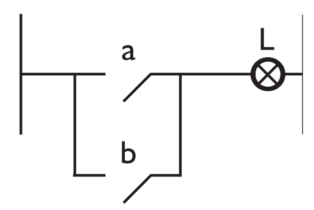
Mieux, on pourra écrire toute relation binaire du tableau ci-dessus en utilisant un seul connecteur! Citons en exemple la «barre de Sheffer[67]» [p|q] qui

[66] Le programme EXCEL par exemple contient la possibilité d'écrire des structures logiques avec uniquement la conjonction, la disjonction et la négation ainsi que les parenthèses.
[67] Henry M. Sheffer, logicien américain (1882 – 1964).

correspond à la négation d'une conjonction (ou *incompatibilité*), soit la colonne 9. On pourra écrire l'équivalent de notre p ∧ q de la manière suivante:

p	q	p|q	p∧q	(p|q)|(p|q)
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

Ces simplifications ne semblent être que des jeux, mais ont des applications très concrètes en électronique. Le plus simple circuit électrique en est la preuve. Ainsi une lampe pouvant être allumée en deux points différents (circuit parallèle) fonctionne selon la définition de notre «*ou inclusif*»[68].



L'électricité passe s'il l'un au moins des commutateurs est activé.



[68] …ce qui justifie par ailleurs ce sens de «ou»…

1.4 LOGIQUE DES PRÉDICATS

Nous avons vu plus haut (cf. 1.1.4) que pour certaines formes de raisonnement les moyens de la logique des propositions s'avèrent insuffisants pour parvenir à une symbolisation adéquate. Il était apparu que pour certains raisonnements la validité repose aussi sur la structure interne des propositions élémentaires.

1.4.1 Notation

Considérons:
(1) Tous les hommes sont mortels.
(2) Socrate est un homme.
(3) Donc Socrate est mortel.

Analysons la *deuxième prémisse*:

L'individu	'Socrate' (sujet)	a l'attribut	'être humain' (propriété)

Il y est question d'un individu spécifié, bien identifié qui possède une certaine propriété. Un tel énoncé où l'individu ayant une certaine propriété est connu est appelé *proposition singulière*.

Symboles:

- des lettres minuscules (ici: s) désigneront les individus dans un raisonnement, ce sont des constantes individuelles;

- des lettres majuscules (ici: A) désigneront (en suivant l'ordre de l'alphabet) les propriétés figurant dans un raisonnement, ce sont des prédicats.

Nous aurons donc comme transcription: As

Analysons la *première prémisse:*
Elle ne parle d'aucun individu précis, mais d'un ensemble d'individus qui ne sont plus identifiés, mais demeurent inconnus. Et *tous* ces individus ont certaines propriétés (être homme, être mortel). On a *quantifié* la fonction propositionnelle (indiqué le nombre d'individus qui ont la propriété). On parlera ici d'une *proposition universelle* (parlant ici de tous les individus). D'autres quantifications sont possibles: quelques, aucun, pas tous etc.

Symboles:

- on désignera les individus non identifiés par la lettre minuscule x, c'est une variable individuelle;

- On indiquera la quantité d'individus [ici: tous = (∀x)], c'est un quantificateur.

Nous aurons pour la 1ère prémisse: $(\forall x)\ [Ax \rightarrow Bx]$.

Le raisonnement entier peut être symbolisé par:
(1) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow Bx]$
(2) As
$\vdash$ Bs

Nous utiliserons deux quantificateurs:
- le quantificateur universel $(\forall x)$ «tous»
- le quantificateur existentiel $(\exists x)$ «il existe au moins un»

1.4.2 Interprétation de $(\forall x)$ et $(\exists x)$

1.4.2.1 RELATIONS

Considérons la proposition
«*Tous sont venus*» = $(\forall x)\ Ax$

Ceci signifie aussi:
«*Il n'existe aucun individu qui ne soit pas venu*» = $\overline{(\exists x)\overline{Ax}}$

Nous voyons que les quantificateurs sont interdéfinissables. Nous pouvons dresser le tableau de ces relations[69]:

Relations entre les quantificateurs:

$(\forall x)\ Ax$ «chaque x est venu»	$\Leftrightarrow$	$\overline{(\exists x)\overline{Ax}}$ «il n'y a pas de x qui ne soit pas venu»
$(\forall x)\ \overline{Ax}$ «chaque x n'est pas venu» *aucun x n'est venu*	$\Leftrightarrow$	$\overline{(\exists x)Ax}$ «il n'y a pas de x qui soit venu»
$\overline{(\forall x)Ax}$ « il est faux que tous les x soient venus» *tous les x ne sont pas venus*	$\Leftrightarrow$	$(\exists x)\ \overline{Ax}$ «il y a des x qui ne sont pas venus»
$\overline{(\forall x)\overline{Ax}}$ «il est faux qu'aucun x ne soit venu»	$\Leftrightarrow$	$(\exists x)\ Ax$ «il y a au moins un x qui est venu»

[69] Les expressions entre « » donnent une lecture littérale de l'expression formelle redressée en français si nécessaire.

1.4.2.2 RÈGLES

A) pour remplacer les quantificateurs:

1. on échange le quantificateur
2. on nie ce qui est lié par le quantificateur;
3. on nie l'expression entière

B) pour transformer l'expression (∀x) [Ax → Bx]:

$(\forall x)\,[Ax \to Bx]$	⇔	$\overline{(\exists x)\left[\overline{Ax \to Bx}\right]}$	⇔	$\overline{(\exists x)\left[Ax \wedge \overline{Bx}\right]}$
		par la règle ci-dessus		par Implication niée

1.4.2.3 LE SENS DES QUANTIFICATEURS

L'universelle

«*Tous les hommes sont mortels*» est transcrit par: $(\forall x)\,[Ax \to Bx]$

Sens:

ceci vaut pour l'individu a:	$Aa \to Ba$
ceci vaut pour l'individu b:	$Ab \to Bb$
ceci vaut pour l'individu c:	$Ac \to Bc$
etc.	

- Pourquoi ne peut-on pas symboliser par: $(\forall x)\,Ax \to Bx$?

Ceci signifierait que la propriété B n'est pas liée au quantificateur.
Sens possible:

ceci vaut pour l'individu a:	$Aa \to Ba$
ceci vaut pour l'individu b:	$Ab \to Ba$
ceci vaut pour l'individu c:	$Ac \to Ba$
etc.	

- Pourquoi ne peut-on pas symboliser par: $(\forall x)\,[Ax \wedge Bx]$?

Ceci signifierait que n'importe quel x (animal, chaussure, vin de Bourgogne...) serait un homme et mortel! L'univers serait trop large.

Remarque:
Dans l'expression $(\forall x)\,[Ax \to Bx]$ **l'existence effective** de cet individu x n'est pas affirmée. Ceci devient clair lorsqu'on transforme l'universelle en existentielle:

$\overline{(\exists x)[Ax \wedge \overline{Bx}]}$ (par implication niée) «*il n'y a pas d'individu qui soit homme et immortel*» où l'existence effective d'un individu mortel n'est pas affirmée, mais seulement l'inexistence d'un immortel[70]!

L'existentielle

«*Certains élèves sont présents*» est transcrit par: $(\exists x)\ [Ax \wedge Bx]$

Ceci signifie **qu'il y a au moins** un individu qui possède les deux propriétés **à la fois**.

- Pourquoi ne peut-on pas symboliser par: $(\exists x)\ [Ax \rightarrow Bx]$?

L'implication est beaucoup moins forte, beaucoup moins restrictive quant à la vérité de l'expression entière. L'existence d'un élève resterait hypothétique alors qu'elle est affirmée.

Remarque 1:

Dans l'expression $(\exists x)\ [Ax \wedge Bx]$ l'existence effective de cet individu x est affirmée. Ceci devient clair lorsqu'on transforme l'existentielle en universelle:

$\overline{(\forall x)[Ax \rightarrow \overline{Bx}]}$ «il est faux de dire que tous les élèves soient absents» où l'existence de certains individus présents est implicitement affirmée.

Remarque 2:

Avec $(\exists x)\ Ax$ signifiant: «*il existe au moins un x ayant A comme propriété*», le nombre exact reste ouvert vers le haut. Aucune limitation en ce sens n'est donnée et, à la limite, tous les x pourraient la posséder. Mais nous ne le savons pas!



[70] Ceci explique que les règles des subalternes dans le carré logique ne portent pas dans la logique des prédicats (cf 1.2.1.1.5). Si l'on veut donner une signification existentielle à l'universelle «Tous les hommes sont mortels», il convient de compléter l'universelle par l'existentielle «Il existe des hommes».

2.1 SYLLOGISMES [SY]

Dans les exercices suivants (SY) il faudra **tirer la conclusion** ou **montrer pourquoi on ne peut pas conclure** par voie syllogistique**.**

On remarquera qu'il est parfois nécessaire de changer l'ordre des prémisses ou de reformuler une des prémisses!

Employez les abréviations suivantes:
1 = majeure
2 = mineure
F = figure
M = mode
C = conclusion
↓↑= changement de l'ordre des prémisses

SY 1 Aucun poisson n'est baleine. Toute baleine a des nageoires.

SY 2 Aucun poisson ne respire par des poumons. Les baleines le font.

SY 3 Tout mammifère est vivipare. La baleine est vivipare.

SY 4 Nul animal à respiration branchiale n'est baleine. Tout poisson respire par des branchies.

SY 5 Les puissants ne sont pas miséricordieux. Les pauvres ne sont pas des puissants.

SY 6 Les Arlonais sont des Européens. Ils sont également des Belges.

SY7 Nulle comète n'est une étoile fixe. Toutes les comètes sont des corps célestes.

SY 8 Tout ce qui est vénéneux est nuisible. Ces champignons sont nuisibles.

SY 9 Toute vertu est compatible avec l'amour de la vérité. Certaines formes de patriotisme sont incompatibles avec l'amour de la vérité.

SY 10 Une artère n'est pas une veine. Les veines sont des vaisseaux sanguins.

SY 11 Quelques chandelles éclairent très mal. Les chandelles sont faites pour éclairer.

SY 12 Aucune grenouille n'est poète. Quelques canards ne sont pas des poètes.

SY 13 Tous les Luxembourgeois sont des hommes. Aucun Luxembourgeois n'est un Sénégalais.

SY 14 Les courbes dont l'équation n'est pas du second degré ne sont pas des coniques. Les spirales n'ont pas d'équation du second degré.

SY 15 Tout sot est ennuyeux. Certains bavards ne sont pas ennuyeux.

SY 16 L'homme que la police recherche a les cheveux roux. Cet homme n'a pas les cheveux roux.

SY 17 Ce qui n'est pas composé n'est pas divisible. L'âme n'est pas composée.

SY 18 Les êtres doués de raison sont responsables de leurs actes. Les brutes ne sont pas responsables.

SY 19 Les élèves de notre lycée sont talentueux. Ils sont aussi des hommes.

SY 20 Les express ne s'arrêtent pas à cette gare. Ce train ne s'arrête pas à cette gare.

SY 21 Vents et températures sont imprévisibles. Cependant ils sont régis par des lois immuables.

SY 22 Tous les hommes sont doués de sensibilité et de mémoire. Une bête n'est pas un homme.

SY 23 Tous les députés sont législateurs. Certains médiocres sont législateurs.

SY 24 Tous les lions sont féroces. Quelques lions ne boivent pas de café.

SY 25 Tout envieux est chagrin. Aucun homme de bonne compagnie n'est chagrin.

SY 26 Nul homme autoritaire ne supporte la contradiction. Presque tous les professeurs la supportent.

SY 27 Il existe des philosophes qui ne sont pas des poètes. Tous les philosophes sont des penseurs.

SY 28 Quelques professeurs sont des physiciens. Tous les physiciens sont des scientifiques.

SY 29 Toutes les voitures de formule 1 sont des automobiles. Aucune automobile n'est sans freins.

SY 30 La plupart des métaux ont un point de fusion très élevé. Le plomb est très fusible.

SY 31 Les obélisques sont des monolithes. Les pyramides se composent de nombreux blocs de pierre.

SY 32 Tous les communistes sont pacifistes. Aucun impérialiste n'est pacifiste.

SY 33 Un fossile ne peut pas être malheureux en amour. Il y a des huîtres malheureuses en amour.

SY 34 Aucune difficulté n'est insurmontable. Il existe des situations insurmontables qui sont ridicules.

SY 35 Tout ce qui brille n'est pas or. L'or jaune brille.

Examinez les raisonnements suivants:
La conclusion **découle-t-elle des prémisses** par voie syllogistique?
Utilisez les mêmes abréviations que pour les exercices précédents.

SY 36 Les Anglais sont des Européens. Les Iraniens ne sont pas des Anglais.
|— Les Iraniens ne sont pas des Européens.

SY 37 Tout oiseau est ovipare. La chauve-souris ne l'est pas.
|— Elle n'est pas un oiseau.

SY 38 Tout homme a un corps. Tout homme est habitant de la terre.
|— Tout habitant de la terre a un corps.

SY 39 Aucun docteur n'est enthousiaste. Vous êtes enthousiaste.
|— Vous n'êtes pas docteur.

SY 40 Aucun avare n'est altruiste. Les avares conservent les coquilles d'oeufs.
|— Aucune personne altruiste ne conserve les coquilles d'oeufs.

SY 41 Aucun empereur n'est dentiste. Tous les dentistes sont redoutés.
|— Aucun empereur n'est redouté.

SY 42 Tout homme prudent évite les hyènes. Aucun banquier n'est imprudent.
|— Aucun banquier ne manque jamais d'éviter les hyènes.

SY 43 Aucun professeur n'est ignorant. Les ignorants sont bêtes.
|— Un professeur n'est pas bête.

SY 44 Tous les gens sans instruction sont superficiels. Les étudiants ont tous de l'instruction.
|— Aucun étudiant n'est superficiel.

SY 45 Aucun singe n'est soldat. Tous les singes sont malicieux.
|— Quelques créatures malicieuses ne sont pas soldats.

SY 46 Aucune brouette n'est confortable. Aucun véhicule inconfortable n'a de succès.
|— La brouette n'a pas de succès.

SY 47 Tous les Ecossais aiment le whisky. Un Ecossais ne saurait être un Anglais.
|— Quelques amateurs de whisky ne sont pas des Anglais.

SY 48 La grande majorité des logiciens croit avoir dépassé Aristote. Tous les logiciens sont tributaires d'Aristote.
|— Quelques-uns de ceux qui croient avoir dépassé Aristote sont tributaires de lui.

SY 49 La syllogistique d'Aristote n'a pas besoin d'appareil mathématique. La logique de Tarski a besoin d'un tel appareil.
|— La logique de Tarski n'est pas la syllogistique d'Aristote.

SY 50 Un joueur de tennis n'est pas un homme comme les autres. Un snob est un homme comme les autres.
|— Aucun homme comme les autres ne joue au tennis.

SY 51 Tous les aigles savent voler. Quelques cochons sont incapables de voler.
|— Quelques cochons ne sont pas des aigles.

SY 52 Il y a des gourmets qui manquent de générosité. Mes professeurs sont tous généreux.
|— Ils ne sont pas des gourmets.

SY 53 Quelques philosophes sont obscurs et confus. Descartes n'est ni l'un ni l'autre.
|— Pas tous les philosophes sont comme Descartes.

SY 54 Aucun canari qui chante à plein gosier n'est mélancolique. Tous les canaris bien nourris chantent à plein gosier.
|— Aucun canari bien nourri n'est mélancolique.

SY 55 La logique m'intrigue. Ce qui est compréhensible ne m'intrigue jamais.
|— La logique est incompréhensible.

SY 56 Les coniques peuvent s'exprimer par une équation du second degré. La chaînette ne peut pas être exprimée ainsi.
|— Elle n'est pas une conique.

SY 57 Tous les chirurgiens sont carnivores. Les chirurgiens ne gagnent pas assez pour acheter du saucisson.
|— Il y a des carnivores qui ne gagnent pas assez pour acheter du saucisson.

SY 58 Qui dit que je suis un homme dit une chose vraie. Qui dit que je suis un sot dit que je suis un homme.
|— Qui dit que je suis un sot dit une chose vraie.

SY 59 Il n'y a pas de matière inorganique qui soit vivante. Il y a du vivant qui a de la conscience.
|— Quelques êtres doués de conscience ne sont pas inorganiques.

SY 60 Toutes les voitures sont des véhicules. Il n'y a aucun véhicule qui soit sans freins.
|— Quelques appareils sans freins ne sont pas des voitures.

2.2 PARALOGISMES ET SOPHISMES [PAR]

Identifier les paralogismes (PAR) suivants:

PAR 1 Je suis certain que ton professeur sera raisonnable dans l'appréciation de tes performances en logique. Après tout, l'homme est un animal raisonnable.

PAR 2 Chaque producteur est libre de fixer le prix de la marchandise qu'il a produite. Il est donc parfaitement normal que tous les producteurs se réunissent pour fixer le prix des marchandises qu'ils ont tous produites.

PAR 3 La tricherie aux épreuves scolaires n'est pas immorale, puisque c'est une pratique courante dans nos écoles.

PAR 4 La tricherie aux épreuves scolaires n'est pas immorale, car la majorité des jeunes et même des adultes ne la considèrent pas comme immorale.

PAR 5 La tricherie aux épreuves scolaires ne peut être immorale, car il y a beaucoup de cas où elle n'a pas été punie.

PAR 6 N'importe qui a le droit de rassembler la documentation dont il a besoin au moment où il le faut. On devrait donc autoriser les élèves à se documenter lors des épreuves scolaires.

PAR 7 Ce qu'on n'a pas perdu, on l'a. Tu n'as pas perdu des ailes. Donc tu les as encore.

PAR 8 Pour donner au Sinanthrope un statut humain, les anatomistes s'appuient sur les archéologues et les archéologues sur les anatomistes.

PAR 9 A un médecin, qui croyait le cancer inguérissable, on signalait des cas de guérison. Il répondit: ‘Ce n'était certainement pas du vrai cancer’.

PAR 10 Le peuple ruritanien est très courageux. Or, N. est un Ruritanien. Donc N. est très courageux.

PAR 11 Tout ce qui est rare est cher. Or, un appartement bon marché est rare. Donc un appartement bon marché est cher.

PAR 12 Jean et Jacques aiment la même femme. Or, c'est le propre des amis que d'aimer la même chose. Jean et Jacques sont donc nécessairement des amis.

PAR 13 A un critique littéraire qui louait les écrivains pour leur clarté, on objectait que Lessing était clair sans être Français.

PAR 14 Les élèves du lycée X ont organisé une matinée théâtrale. Jean est un élève du lycée X. Donc Jean a organisé une matinée théâtrale.

PAR 15 Tu ne connais pas cet homme que voilà. Cet homme que voilà est ton père. Tu ne connais donc pas ton père.

PAR 16 Quiconque est affamé mange beaucoup. Or, quiconque mange peu est affamé. Donc, qui mange peu mange beaucoup.

PAR 17 Celui qui fait du tort à autrui doit être puni. Or, quiconque transmet à un autre une maladie contagieuse fait du tort à un autre. Il doit donc être puni.

PAR 18 Ces propositions de réforme de la Caisse de Maladie ne valent rien: les médecins en sont les auteurs et ce sont eux qui profitent le plus de la Caisse de Maladie.

PAR 19 Les épouses de diplomates possèdent toutes une garde-robe bien garnie. Pour une femme, le meilleur moyen d'aider son mari à devenir diplomate est donc d'acheter le plus grand nombre possible de vêtements.

PAR 20 Je mérite un salaire plus élevé, car je n'arrive plus à nourrir mes enfants et le plus jeune est tombé malade.

PAR 21 Pendant la guerre, on a découvert des réseaux d'espionnage en surveillant leurs communications téléphoniques. Il faudrait donc que les autorités surveillent les communications téléphoniques de toutes les personnes suspectes.

PAR 22 Il est manifeste que le socialisme est le meilleur régime politique. Les faits en sont témoins. Alors qu'à un moment donné, toute la production dépendait de l'initiative privée, c'est aujourd'hui l'Etat qui stimule ou freine la production.

PAR 23 Pendant la Guerre Civile des Etats-Unis, le président Lincoln fut averti que le Général Grant, qui remportait une victoire après l'au-

tre, s'était adonné au whisky. Le président répondit: ‘Je voudrais que le général Grant envoyât un tonneau de son whisky au reste de mes généraux’.

PAR 24 Le bonheur est pour chaque personne un bien. Le bonheur général est donc un bien pour l'ensemble des personnes.

PAR 25 Pour réfuter les Eléates et leur thèse que le mouvement n'est qu' une apparence, Diogène se bornait à faire quelques grands pas.

PAR 26 Le professeur de philosophie signale une faute de logique chez Marx. Certains élèves estiment qu'il a par là commis un ‘argumentum ad hominem’ et qu'il n'a pas le droit de dénigrer cet auteur dont il n’a même pas lu la moitié des ouvrages.

PAR 27 Le cancre X, intelligence médiocre, remet un excellent devoir fait à domicile. Le professeur prétend que ce travail n'est pas de son cru.

PAR 28 Il est faux que l'effet ne précède jamais sa cause. En effet: une voiture en marche est toujours précédée d'une bande d'air comprimée; et pourtant cet air comprimé est l'effet de la voiture en marche.

PAR 29 Lors de la constitution d'une association d'anciens soldats du service militaire obligatoire, le président de l'assemblée annonce que plus de 4000 personnes ont déclaré leur volonté d'adhésion et que ceci prouve la légitimité des revendications de cette association.

PAR 30 343 contient trois chiffres. $7^3 = 343$. Donc: 7^3 contient trois chiffres.

PAR 31 Un grain de blé ne fait pas de bruit en tombant. Donc: mille grains de blé ne peuvent pas produire de bruit en tombant, car 0 x 1000 font 0.

PAR 32 Une autorité doit être respectée. En effet, si elle ne l'était pas, elle ne serait plus une autorité.



2.3 TRANSCRIPTIONS (SYMBOLISATIONS)

2.3.1 Propositions

2.3.1.1 CONSEILS

Avant la transcription en logique des propositions (TR) on suivra les principes suivants:

- ignorer:
  - les signes d'interrogation ou d'exclamation,
  - le temps grammatical de la proposition;

- établir un lexique des propositions élémentaires en:
  - suivant l'ordre d'apparition des propositions élémentaires dans le texte,
  - prenant les majuscules de l'alphabet dans leur ordre habituel,
  - retenant un seul symbole pour deux ou plusieurs propositions identiques,
  - évitant de symboliser deux fois les propositions à sens identique, mais à vocabulaire différent,
  - faisant attention aux négations qui n'en sont pas! [«*il pleut*» n'est pas la négation de «*il fait beau*», de même que «*il ne fait pas beau*» ne signifie pas forcément «*il pleut*»! (un test efficace est donc de nier les deux pour voir si la négation supposée reste pertinente)],
  - gardant uniquement des propositions affirmatives (il y a un symbole pour la négation!),
  - notant ce lexique;

- identifier les opérateurs logiques contenus dans la proposition à transcrire en:
  - considérant les tournures très diverses selon lesquelles les connecteurs logiques peuvent s'exprimer en langage courant (cf. lexique de symbolisation),
  - déterminant, pour les conditionnelles, si la condition est suffisante, nécessaire ou nécessaire et suffisante;

- déterminer la structure de la proposition en:
  - commençant par l'opérateur central,
  - fixant la portée exacte de chaque opérateur,
  - plaçant les parenthèses, crochets et accolades.

Petit conseil pratique: en numérotant les prémisses dans le texte on risque moins d'en oublier une lors de la transcription où on la numérotera aussi.

2.3.1.2 EXERCICES COMMENTÉS

Il y a trois étapes à suivre dans une symbolisation: il faudra établir le **lexique**, la **structure** et la **transcription**[71].

Exercice 1

Si Suzanne a de l'humour, alors elle est pince-sans-rire. Si elle est pince-sans-rire ou si elle est farfelue, alors elle aime le cocasse. Suzanne a de l'humour. Donc, Suzanne aime le cocasse ou elle est caucasienne.

Etablissons d'abord un **lexique** selon les principes fixés plus haut:

A = Suzanne a de l'humour.
B = Suzanne est pince-sans-rire.
C = Suzanne est farfelue.
D = Suzanne aime le cocasse.
E = Suzanne est caucasienne.

Nous remarquons: *Suzanne a de l'humour*, *Suzanne est pince-sans-rire* et *Suzanne aime le cocasse* apparaissent plus d'une fois dans le raisonnement, mais ne sont symbolisés qu'une seule fois.

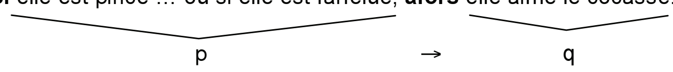
Déterminons la **structure** des différentes propositions complexes: (à cet effet nous n'allons pas considérer les négations pour les grandes structures générales)

- Prémisse 1:
  Si Suzanne a de l'humour **alors** elle est pince-sans-rire.



a la forme: p → q

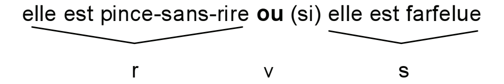
- Prémisse 2:
  Si elle est pince … ou si elle est farfelue, **alors** elle aime le cocasse.



p → q

avec en plus l'antécédent complexe p ayant la structure:

elle est pince-sans-rire **ou** (si) elle est farfelue



r v s

Nous remarquons que r et s sont les deux conditions possibles pour le conséquent q et nous devons donc les regrouper par des parenthèses.

[71] Avec un minimum d'expérience les étapes «structure» et «transcription» se confondront.

Nous avons la structure générale: $(r \vee s) \rightarrow q$

- Prémisse 3:

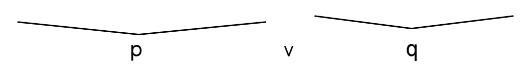
  Suzanne a de l'humour.

  p

  Il s'agit d'une proposition simple qui sera donc rendue sans aucune structure particulière.

- Conclusion:

  Donc Suzanne aime le cocasse **ou** elle est caucasienne.



  p v q

  Nous ne mettons pas de parenthèses puisqu'il n'y a pas de doute sur les éléments qui sont reliés par la disjonction v; la structure étant $p \vee q$, il nous reste à symboliser le «donc» et nous aurons:

  $\vdash p \vee q$

Notons la **transcription** définitive en transposant les éléments du lexique dans les structures obtenues:

(1) $A \rightarrow B$
(2) $(B \vee C) \rightarrow D$
(3) A
$\vdash D \vee E$

Exercice 2

Si Alfred part, alors Hélène ou Sébastienne pleurent. Si Hélène pleure, Alfred ne part pas. Si Agnès pleure, alors Sébastienne ne pleure pas. Donc, si Alfred part, alors Agnès ne pleure pas.

<u>1. Lexique</u>

A = Alfred part.
B = Hélène pleure.
C = Sébastienne pleure.
D = Agnès pleure.

<u>2. Structure</u>

- Prémisse 1:

  Si Alfred part, **alors (** Hélène **ou** Sébastienne pleurent **).**

  $p \rightarrow (q \vee r)$

  Le «alors» introduit une conséquence alternative regroupée par les parenthèses .

- Prémisse 2:
  Si Hélène pleure, **(alors)** Alfred **ne** part **pas.**
  $p \quad \rightarrow \quad \overline{q}$
  Le conséquent est nié par rapport au lexique.

- Prémisse 3:
  Si Agnès pleure, **alors** Sébastienne **ne** pleure **pas.**
  $p \quad \rightarrow \quad \overline{q}$
- Conclusion:
  Donc si Alfred part, **alors** Agnès **ne** pleure **pas**.
  $\vdash \quad p \quad \rightarrow \quad \overline{q}$
  On remarquera que les prémisses 2 et 3 ainsi que la conclusion ont la même structure.

3. Transcription

(1) $A \rightarrow (B \vee C)$
(2) $B \rightarrow \overline{A}$
(3) $D \rightarrow \overline{C}$
$\vdash$ $A \rightarrow \overline{D}$

Exercice 3

S'il est faux que E soit honnête ou P un idiot, alors si J n'est pas le Maître, G n'est pas son fidèle valet. E joue double jeu alors que G est le fidèle servant de son maître et il est faux qu'à la fois E joue double jeu et que P soit un idiot. Donc, E joue double jeu et J est le Maître.

1. Lexique

A = E est honnête (E joue double jeu = E n'est pas honnête).
B = P est un idiot.
C = J est le maître.
D = G est le fidèle valet (servant).

2. Structure

- Prémisse 1:
  S'il est faux que … ou … idiot, **alors** si … G n'est pas son … valet.
  $p \quad \rightarrow \quad q$

  La proposition entière est une conditionnelle.

  o *antécédent p:*
  il est faux que E soit honnête **ou** P un idiot
  $\overline{r \quad \vee \quad s}$
  l'antécédent est une disjonction assertée comme **fausse;**

- *conséquent q:*

si J **n'est pas** le Maître, **(alors)** G **n'est pas** son fidèle valet

$\bar{t} \rightarrow \bar{u}$

c'est à son tour une conditionnelle où tant l'antécédent que le conséquent sont niés.

Structure complète prémisse 1:

$\overline{r \lor s} \rightarrow (\bar{t} \rightarrow \bar{u})$

- Prémisse 2:

E joue … alors que G … **et** il est faux qu'à la fois E … et que P …

$p \land q$

La proposition entière est une conjonction.

- *premier terme p:*

E joue double jeu **alors que** G est le fidèle servant de son maître

$\bar{r} \land s$

alors que exprime une concordance dans le temps (= en même temps que; et) et le premier terme est faux;

- *deuxième terme q:*

il est faux qu'à la fois E joue double jeu **et** que P soit un idiot

$\overline{\bar{t} \land u}$

La conjonction est assertée comme fausse, et le premier terme est faux aussi.

Structure complète prémisse 2:

$(\bar{r} \land s) \land \overline{\bar{t} \land u}$

- Conclusion

Donc E joue double jeu **et** J est le Maître.

$\vdash \bar{p} \land q$

3. Transcription

(1) $\overline{A \lor B} \rightarrow (\overline{C} \rightarrow \overline{D})$

(2) $(\overline{A} \land D) \land \overline{\overline{A} \land B}$

$\vdash$ $\overline{A} \land C$

Exercice 4
Il n'est pas vrai qu'il suffit de lire le Monde pour être bien informé, mais il est vrai qu'il faut le lire pour être bien informé.

1. Lexique

A = On lit le Monde.
B = On est bien informé.

«il suffit» et «il faut» expriment la nature des deux conditionnelles, la première étant une condition suffisante, la deuxième une condition nécessaire.

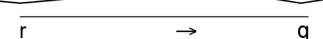
2. Structure

Il n'est ... qu'il suffit … informé, **mais** il est vrai qu'il faut … informé.

p ∧ q

○ *premier terme p:*

Il n'est pas vrai qu'**il suffit** de lire le Monde **pour** être bien informé



$\overline{r \rightarrow q}$

r est une condition suffisante et l'expression entière est niée.

○ *deuxième terme q:*

Il est vrai qu'**il faut** le lire **pour** être bien informé



{ **r** → q }

r étant ici une condition nécessaire on aura:

q → **r**



Structure complète:

$\overline{r \rightarrow s} \wedge (q \rightarrow r)$

3. Transcription

$\overline{A \rightarrow B} \wedge (B \rightarrow A)$

Exercice 5

Si H ne comprend rien à la logique, alors ou bien la logique est difficile ou bien nous ne pouvons pas admettre que I soit un génie et que O soit un ignorant. Si A est ici, alors I est un génie et H ne comprend rien à la logique. A est ici et la logique est un jeu d'enfants. I a un Q.I. de 180. Donc, O n'est pas un ignorant.

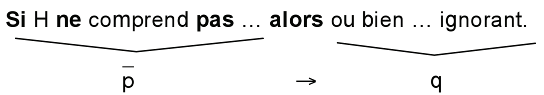
1. Lexique

A = H comprend la logique.
B = la logique est difficile.
C = I est un génie (et avec un quotient intellectuel de 180 on l'est aussi!!).
D = O est un ignorant.
E = A est ici.

2. Structure

- Prémisse 1:

Si H **ne** comprend **pas** … **alors** ou bien … ignorant.



$\bar{p} \quad \rightarrow \quad q$

  - *conséquent q:*

ou bien la logique … **ou bien** nous ne …

$r \quad \vee \quad s$

Ou bien … ou bien exprime un «ou» exclusif, mais est symbolisé dans notre système par $\vee$ (= ou inclusif);

  - *deuxième terme s:*

Nous ne pouvons pas admettre que … **et** que O soit un ignorant

$\overline{t \quad \wedge \quad u}$

La négation en début de phrase porte sur toute la conjonction.

Structure complète prémisse 1:

$\bar{p} \rightarrow (r \vee \overline{t \wedge u})$

- Prémisse 2:

Si A est ici, **alors** I est un génie et H ne comprend rien à la logique.

$p \quad \rightarrow \quad q$

  - *conséquent q:*

I est un génie **et** H **ne** comprend **rien** à la logique

$r \quad \wedge \quad \bar{s}$

Structure complète prémisse 2:

$p \rightarrow (r \wedge \bar{s})$

- Prémisse 3:

  A est ici **et** la logique est un jeu d'enfants.

  $p \quad \wedge \quad \overline{q}$

  Le deuxième terme est une négation par rapport au lexique.

- Prémisse 4:

  I a un Q.I. de 180.

  p

  C'est une proposition élémentaire sans autre structure.

- Conclusion:

  Donc O n'est pas un ignorant.

  $\vdash \quad \overline{p}$

  C'est une proposition élémentaire niée.

3. Transcription

(1) $\overline{A} \rightarrow [B \vee \overline{C \wedge D}]$

(2) $E \rightarrow (C \wedge \overline{A})$

(3) $E \wedge \overline{B}$

(4) C

$\vdash \quad \overline{D}$

Exercice 6

Si je paie mon garagiste, il ne me restera plus d'argent. Mais il me faut de l'argent pour pouvoir inviter ma petite amie au restaurant. Ou je peux inviter mon amie ou elle sera triste. Si je ne paie pas mon garagiste, il ne me donnera pas ma voiture et je ne pourrai pas inviter mon amie au restaurant. Je payerai mon garagiste à moins que je ne le paye pas. Donc, mon amie sera triste.

Lexique

A = Je paie mon garagiste.
B = J'ai de l'argent (il me reste de l'argent).
C = Je peux inviter ma petite amie au restaurant.
D = Mon amie sera triste.
E = Mon garagiste me donne ma voiture.

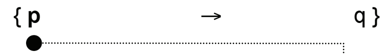
Structure

- Prémisse 1:

  Si je paie mon garagiste, **alors** il ne me restera plus d'argent.

  $p \quad \rightarrow \quad \overline{q}$

- Prémisse 2:
  Mais **il me faut** de l'argent **pour** pouvoir inviter ma petite amie au restaurant
  { **p** $\rightarrow$ q }



  p étant une condition nécessaire on écrira:

  q $\rightarrow$ **p**



- Prémisse 3:
  Ou je peux inviter mon amie **ou** elle sera triste.
  p $\vee$ q

- Prémisse 4:
  Si je ne paie pas mon garagiste, **(alors)** il ne … et … restaurant
  $\bar{p}$ $\rightarrow$ q

  ○ *conséquent q:*
  il ne me donnera pas … **et** je ne pourrai pas … au restaurant
  $\bar{r}$ $\wedge$ $\bar{s}$

  Structure complète prémisse 4:
  $\bar{p} \rightarrow (\bar{r} \wedge \bar{s})$

- Prémisse 5:
  Je payerai mon garagiste **à moins que** je **ne** le paye **<u>pas</u>**.
  p $\vee$ $\bar{p}$
  «À moins que … ne» peut être remplacé par «ou», mais le «pas» en fin de phrase indique que le deuxième terme est nié[72].

- Conclusion:
  Donc mon amie sera triste.
  $\vdash$ p

<u>Transcription</u>

(1) $A \rightarrow \bar{B}$
(2) $C \rightarrow B$
(3) $C \vee D$
(4) $\bar{A} \rightarrow (\bar{E} \wedge \bar{C})$
(5) $A \vee \bar{A}$
$\vdash$ D

---
[72] cf. 1.3.2.3.4

2.3.1.3 APPLICATIONS [TR]

TR 1 Ou bien le ciel n'est pas bleu, ou bien il ne pleut pas. S'il ne pleut pas, je n'ai pas besoin de parapluie. Si j'étais Anglais, j'aurais besoin d'un parapluie. Donc, si le ciel est bleu, je suis Anglais.

TR 2 Si les élèves étudient les mathématiques et l'économie politique, alors ils étudient la philosophie ou le français. Or, il n'est pas vrai que s'ils étudient la philosophie, ils n'étudient pas l'économie politique. Donc, ils étudient les mathématiques ou le français.

TR 3 Si les salaires et les prix augmentent, il y aura inflation. S'il y a inflation, le gouvernement devra se démettre. Si le gouvernement est capable de gouverner, il ne se démettra pas. Or, les prix ont augmenté et les syndicats protestent. Donc, si les salaires augmentent, le gouvernement n'est pas capable de gouverner.

TR 4 J'étudie le français et les mathématiques. Si j'étudie le français, je pourrai apprécier Descartes. Il n'est pas vrai que j'étudie l'anglais et que j'apprécie Descartes. Si je puis apprécier Descartes et que je n'étudie pas l'anglais, je ne serai pas reçu au bac. Si je ne suis pas reçu au bac, je resterai au lycée. Donc, je resterai au lycée.

TR 5 Si l'enquête continue, de nouveaux faits seront connus. Si de nouveaux faits sont connus, plusieurs personnalités politiques seront impliquées. Si plusieurs personnalités politiques sont impliquées, les journaux ne diront plus rien à propos de l'affaire. Si la poursuite de l'enquête implique que les journaux ne publient plus rien sur l'affaire, alors, si de nouveaux faits sont connus, l'enquête continue. Or, l'enquête est arrêtée. Donc, il n'y a pas de faits nouveaux ou les politiques sont des sages.

TR 6 Il fait beau et je me promène. S'il fait beau, je bois un bock. Il n'est pas vrai que je me promène et que je reste à la maison. Si je bois un bock et que je ne reste pas à la maison, alors je ne regarde pas la télévision. Si je ne regarde pas la TV, je me morfonds. Donc, je me morfonds ou j'écoute du Bach.

TR 7 Qu'il fasse beau ou qu'il pleuve, si je sors, je vais boire un bock. Si au cas où je bois un bock, je chante, alors il fait beau et je sors. Donc, je bois un bock.

TR 8 Si au cas où il ne pleut pas, le soleil brille, alors je ne vais pas au musée ou je vais à la piscine. S'il ne pleut pas ou si je ne vais pas

au musée, alors je vais à la piscine et je ne joue pas au tennis. Donc, je vais à la piscine.

TR 9 S'il n'est pas vrai que je suis ou bien un oiseau ou bien un serpent, alors il est faux que ou bien je chante ou bien que je siffle. Or, je chante. Donc, si je ne suis pas un oiseau, je suis un serpent.

TR 10 Si j'aime les fleurs ou les papillons, alors si j'embrasse Marie ou Angèle, je serai amoureux et cochon. Or, que je sois cochon ou saint, je serai la coqueluche du sexe ex-faible. Donc, si j'aime les fleurs, alors si j'embrasse Marie, je serai la coqueluche du sexe ex-faible.

TR 11 Si au cas où les élèves n'apprennent rien, c'est la faute des professeurs, alors le Ministère n'est pas assez vigilant ou il faut pondre un règlement. Or, si les élèves n'apprennent rien ou si le Ministère n'est pas assez vigilant, alors la surveillance est mal faite et il faut pondre un règlement. Donc, il faut pondre un règlement ou ce n'est pas la faute aux professeurs.

TR 12 Si le député a les voix des agriculteurs, alors il gagne à la campagne, et s'il a les voix des travailleurs il gagne la ville. Seulement s’il a la campagne et la ville de son côté, il sera élu. Il est certain qu'il ne sera pas élu. Il lui manquera donc les voix des travailleurs s'il a celles des agriculteurs.

TR 13 Je sais que je doute. Si je sais que je doute, alors si c'est une imperfection que de douter, je sais que je suis imparfait. Si c'est une plus grande perfection de connaître que de douter, alors douter est une imperfection. C'est une plus grande perfection de connaître que de douter. Il faut que j'aie l'idée de parfait pour savoir que je suis imparfait. Si j'ai l'idée de parfait, alors elle a comme origine soit le néant, soit le moi, soit l'être parfait qui est Dieu. Si l'idée de parfait a pour origine le néant, alors de rien procède quelque chose. Si elle a pour origine le moi, alors du moins procède le plus. Il est faux que de rien procède quelque chose et il est faux que du moins procède le plus. Donc, l'idée de parfait a pour origine l'être parfait qui est Dieu.

TR 14 Si le monde créé n'est pas le meilleur des mondes possibles, alors Dieu n'a pas connu de meilleur monde, ou bien il n'a pas voulu le créer, ou bien il n'a pas pu le créer. Si Dieu n'a pas connu le meilleur monde, alors Dieu n'est pas omniscient. S'il n'a pas voulu le créer, alors il n'est pas bon. S'il n'a pas pu le créer, alors il n'est

pas tout-puissant. Or, Dieu est bon, omniscient et tout-puissant. Donc, le monde créé est le meilleur des mondes possibles.

TR 15 Si Dieu veut empêcher le mal tout en étant incapable de le faire, il est impuissant. Si Dieu est capable d'empêcher le mal, mais ne veut pas le faire, il est malveillant. Le mal existe si et seulement si Dieu ou bien ne veut pas ou ne peut pas l'empêcher. Dieu n'existe que s'il n'est ni impuissant ni malveillant. Le mal existe et Dieu peut empêcher le mal. Donc, Dieu n'existe pas.

Exercices d'examen

TR 16 Si je ne participe pas à l'excursion de notre association, c'est que je n'ai pas été invité. Je n'ai pas été invité sans que le comité ait désiré ma participation à l'excursion. Je m'apprête à quitter l'association à moins que le comité n'ait désiré ma participation à l'excursion. Donc, je m'apprête à quitter l'association pourvu que je ne participe pas à l'excursion. 1985 (1)

TR 17 Nous n'irons pas à Rome à moins de pouvoir faire des diapositives. Mais pour que nous regardions des diapositives, il faut que nous ayons des soirées libres et que nous invitions des amis. Ou nos amis aiment regarder des diapositives, ou ils seront tristes si nous les invitons. Si nos amis sont tristes ils ne reviendront pas chez nous. Donc, nous irons à Rome seulement si nos amis aiment regarder nos diapositives. 1986 (2)

TR 18 Claudette aime les exercices de logique, mais elle n'est heureuse que si elle mange beaucoup de glaces à la vanille. Pourvu qu'elle réussisse les exercices de logique, elle va se promener en ville le jeudi et non le dimanche, à condition qu'il fasse beau et qu'elle ne soit pas malade. Elle ne mange beaucoup de glaces à la vanille que si elle va se promener en ville le jeudi. Claudette n'est jamais malade à moins qu'elle ne mange beaucoup de glaces à la vanille. Donc, il est faux que si Claudette réussit ses exercices, elle ne tombe pas malade si elle va se promener en ville le jeudi. 1988 (1)

TR 19 Il n'est pas vrai que Célestine s'intéresse à la musique classique sans assister à des concerts. Elle n'assiste à des concerts que si elle a assez d'argent de poche. Elle n'a pas assez d'argent de poche à moins qu'elle ne travaille pendant les vacances et n'achète pas régulièrement des pralines. Donc, il est faux que Célestine s'intéresse à la musique classique seulement si elle n'achète pas de pralines. 1991 (2)

TR 20 Si Claudette ne sort pas l'après-midi, elle regarde la TV ou elle fait ses exercices de logique, à moins qu'elle n'aide sa maman. Il n'est pas vrai qu'elle puisse à la fois faire ses exercices de logique, regarder la TV et aider sa maman. Or, elle aide toujours sa maman si celle-ci a besoin d'elle. Elle fait ses exercices de logique ou elle regarde la TV seulement si elle n'aide pas sa maman. Donc, il est faux qu'elle fasse ses exercices de logique ou qu'elle regarde la TV si sa maman a besoin d'elle. 1996 (1)

TR 21 Roméo ne perd ses kilos superflus que s'il ne somnole pas pendant des heures devant la télé tout en mangeant des hamburgers consistants. Il suffit et il faut qu'il fasse un régime équilibré et qu'il s'adonne au jogging pour retrouver une ligne de star. S'il s'adonne au jogging même quand il tombe une pluie glaciale, Roméo risque d'attraper un gros rhume. Or quand Roméo a attrapé un gros rhume, il somnole pendant des heures devant la télé et cette longue somnolence le pousse à manger des hamburgers consistants. Voilà pourquoi, si Roméo s'adonne au jogging sous la pluie, il ne retrouvera pas sa ligne de star. 1997 (1)

TR 22 Si le souverain outrepasse ses droits, le peuple lui résistera. Ce n'est que s'il est ignorant et fou que le souverain outrepassera ses droits. S'il a été établi par le peuple, le souverain ne saurait être fou. Si le peuple est ignorant, le souverain l'est aussi. Donc, si le peuple n'est pas ignorant, le souverain n'outrepassera pas ses droits. 2006 (1)

TR 23 Le fait que pour acheter ce terrain je devrais vendre les bijoux de ma femme implique deux choses: ou bien notre fils Adam ne s'inscrira pas au cours de saxophone ou bien ma belle-mère piquera une crise. Amédée (le chat de ma belle-mère) cessera de se ronger les griffes si et seulement si je renonce à acheter le terrain en question. Donc, si Amédée met fin à sa manie, il n'est pas faux de dire que ma belle-mère piquera une crise à moins qu'Adam renonce à s'inscrire au cours de saxo. 2007 (1)



2.3.2 Prédicats

2.3.2.1 CONSEILS

Pour la symbolisation en logique des prédicats (PTR), on suivra les mêmes principes que pour la transcription en logique des propositions. On veillera en plus à:

- reprendre dans le lexique:
  - les prédicats (*Eigenschaftsworte*) qui désignent les qualités (ou les propriétés) que les x sont censés posséder,
  - un éventuel univers du discours (à savoir un prédicat qui reviendrait dans chacune des prémisses pour tous les x). En ce cas, x n'est plus indéfini, mais est délimité et prend donc une certaine signification qu'autrement il n'aurait pas;

- identifier correctement les quantificateurs:
  - les propositions singulières (portant sur un individu clairement désigné par son nom) ne sont pas quantifiées,
  - certaines prémisses peuvent comporter deux ou plusieurs propositions quantifiées,
  - dans certaines locutions la quantification (universelle) n'est pas apparente (p.ex. les roses sont rouges = *toutes* les roses….),
  - les universelles s'expriment généralement par des *implications* et les existentielles par des *conjonctions* (des exceptions sont possibles!)[73];

- distinguer clairement les conditions nécessaires (CN) et les conditions nécessaires et suffisantes (CNS):
  - en transcrivant «seul» ou «seulement (si)» toujours par une (CN),
  - en transcrivant «si et seulement si» toujours par une (CNS);

- se laisser guider par son intuition et son bon sens:
  - ce qui en français est une universelle peut éventuellement être mieux saisi comme une existentielle - ceci peut être très différent d'une personne à une autre,
  - la question qu'il faut toujours se poser est: «*quel est le **sens** de la proposition à transcrire et est-ce que ma transcription est conforme à ce sens?*»,
  - en cas de doute, on essayera de transcrire avec l'autre quantificateur,
  - pour cerner le sens de la proposition, il peut s'avérer utile de la traduire en luxembourgeois[74].

---

[73] p.ex «tous sont venus (A) et sont restés (B)» $(\forall x)\ [Ax \wedge Bx]$.
[74] ….ou bien sûr toute autre langue que nous pratiquons facilement!

EXERCICES

2.3.2.2 EXERCICES COMMENTÉS

Nous allons commenter uniquement des propositions isolées représentatives des principales difficultés qui pourraient apparaître lors d'une transcription.

… en allant plus loin… Pour certaines transcriptions on trouvera un encadré qui proposera une analyse plus profonde des propositions avec aussi une transcription différente. Ces suggestions s'entendent comme des pistes de réflexion et ne sont pas obligatoires!

Exercice 1

Michel est ici et il est bien portant.

1. Lexique

Ax = x est ici
Bx = x est bien portant
m = Michel

Il n'y a pas de quantification, mais il est question du seul individu Michel; il s'agit donc d'une proposition singulière.

2. Structure

Michel est ici **et** il est bien portant.

p ∧ q

3.Transcription

$Am \wedge Bm$

Exercice 2

Il y a un pilote dans l'avion.

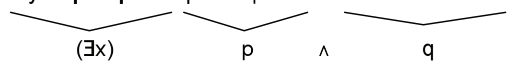
1. Lexique

Ax = x est un pilote
Bx = x est dans l'avion

L'expression «*il y a*» est rendue par la quantification existentielle.

2. Structure

Il y a **quelqu'un** qui est pilote **et** il est dans l'avion.



(∃x) p ∧ q

3. Transcription

$(\exists x)\,[Ax \wedge Bx]$

Exercice 3
Les vieilles femmes sont bigotes.

1. Lexique

Ax = x est vieux
Bx = x est une femme
Cx = x est bigot

Lexique alternatif

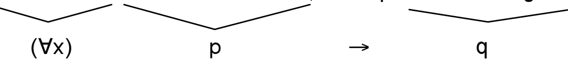
Ax = x est une vieille femme
Bx = x est bigot

A y regarder de près, il y a trois prédicats dans la phrase. Si dans un raisonnement les deux prédicats «être vieux» et «être femme» apparaissaient **toujours** ensemble, on pourrait les unifier par un seul symbole. Ceci est pourtant un exercice délicat!

L'expression «**Les** vieilles femmes ...» sous-entend qu'il s'agit de **toutes** les vieilles femmes.

2. Structure

Pour **toutes** les vieilles femmes, on a qu'elles sont bigotes.



○ *antécédent p:*
les x qui sont vieux **et** qui sont femmes
r ∧ s

3. Transcription

$(\forall x)\ [(Ax \wedge Bx) \rightarrow Cx] \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)\ [Ax \rightarrow (Bx \rightarrow Cx)]$
par exportation

Exercice 4
Aucun rosier n'est en fleurs.

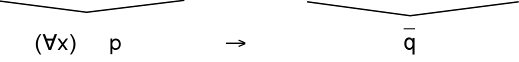
1. Lexique

Ax = x est un rosier
Bx = x est en fleurs

2. Structure

Ici on remarque que l'expression «**Aucun** rosier ...» pourra être transcrite par une universelle ou par une existentielle.

Pour **tous** les rosiers on a qu'ils ne sont **pas** en fleurs



Il n'existe pas de rosier (et) qui soit en fleurs.

$\overline{(\exists x)}$ [75] p $\wedge$ q

3. Transcription

$(\forall x)\ [Ax \rightarrow \overline{Bx}] \Leftrightarrow \overline{(\exists x)[Ax \wedge Bx]}$ [76]

Exercice 5

Tous les rosiers ne sont pas en fleurs.

1. Lexique

Ax = x est un rosier
Bx = x est en fleurs

2. Structure

Ici encore l'expression «**Tous** les rosiers **ne sont pas** en fleurs» est une expression traîtresse en français. A première vue, la négation semblerait se rapporter à «être en fleurs». La traduction littérale en luxembourgeois ou en allemand indiquera pourtant que c'est la quantification universelle qui est niée ici.

Il est faux que pour tous les rosiers on a qu'ils sont en fleurs.



$\overline{(\forall x)}$ p $\rightarrow$ q

ce qui veut dire aussi:
Il existe des rosiers (et) qui ne sont pas en fleurs.

$(\exists x)$ p $\wedge$ $\overline{q}$

2. Transcription

$\overline{(\forall x)[Ax \rightarrow Bx]} \Leftrightarrow (\exists x)\ [Ax \wedge \overline{Bx}]$

Exercice 6

Aucun imbécile n'est inintéressant.

1. Lexique

Ax = x est un imbécile
Bx = x est intéressant

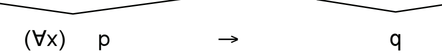
---

[75] Il est entendu que dans la transcription la négation portera sur **toute** l'expression.
[76] cf règles des transformations de quantificateurs (1.4.2.2).

L'expression «**aucun** imbécile **n'est in**intéressant» peut prêter à confusion. A y réfléchir, on remarque une double négation qui donc s'annule. On pourrait tout aussi bien dire: «**tous** les imbéciles sont intéressants».

2. Structure

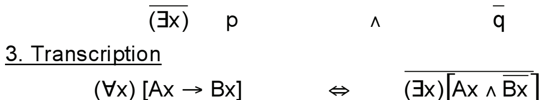
Pour **tous** les imbéciles on a qu'ils sont intéressants.



$(\forall x) \quad p \quad \rightarrow \quad q$

mais on pourrait aussi rendre la structure avec les deux négations.

Il n'existe pas d'imbécile (et) qui ne soit **pas** intéressant.



$\overline{(\exists x)} \quad p \quad \wedge \quad \overline{q}$

3. Transcription

$(\forall x)\,[Ax \rightarrow Bx] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{(\exists x)\left[Ax \wedge \overline{Bx}\right]}$

Exercice 7

Tout ce qui brille n'est pas or.

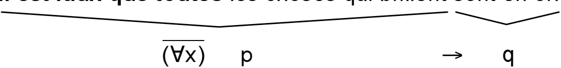
1. Lexique

Ax = x brille
Bx = x est de l'or

2. Structure

Expression traîtresse encore: comme dans l'exemple précédent il sera utile de se demander quel est le sens de l'expression. Une aide sera encore une fois de penser au même dicton en luxembourgeois ou en allemand (*Nicht alles, was glänzt, ist Gold*). On se rend compte que c'est encore une fois la quantification universelle qui est niée.

Il est faux que toutes les choses qui brillent sont en or.



$\overline{(\forall x)} \quad p \quad \rightarrow \quad q$

ce qui veut dire aussi:
Il existe des choses qui brillent (et) qui ne sont pas en or.



$(\exists x) \quad p \quad \wedge \quad \overline{q}$

3. Transcription

$\overline{(\forall x)[Ax \rightarrow Bx]} \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x)\,[Ax \wedge \overline{Bx}\,]$

Exercice 8
Seuls les professeurs sont gentils et dévoués.

1. Lexique

Ax = x est professeur
Bx = x est gentil
Cx = x est dévoué

Ici encore, comme il n'y a pas d'autres propositions, on pourrait retenir «être gentil et dévoué» comme un prédicat.

2. Structure

Nous retrouvons l'expression «**seul**» qui indique une conditionnelle renforcée, donc une condition nécessaire (CN) qui sera placée comme conséquent de l'implication. Par ailleurs, «**les** professeurs» sera interprété comme «**tous les** professeurs».

… en allant plus loin…

On pourrait se demander si la proposition n'exprime pas une condition nécessaire et suffisante (CNS). Lisons la conditionnelle dans les deux sens:
1) «Si je suis gentil et dévoué, alors c'est que je suis professeur» = «être professeur» est **CN** pour être «gentil et dévoué»

Est-ce qu'on pourrait lire aussi:
2) «Si je suis professeur, alors je suis gentil et dévoué» = «être professeur» est **CS** pour être «gentil et dévoué»?

Ne nous laissons pas égarer par nos sentiments …. demandons-nous ce que veut exprimer la proposition! C'est clairement: «Si je ne suis pas professeur, alors je ne suis pas gentil et dévoué».

Donc la lecture «Si je suis professeur, alors je suis gentil et dévoué» exprime un sens qui va bien au-delà du sens initial de la phrase française. Elle signifierait ni plus, ni moins que «*tous les professeurs sont gentils et dévoués*»!

On sent bien que cette lecture n'est pas de mise et on gardera seulement la CN **sans en faire une CNS**.

Pour **tous** les gentils et dévoués on a qu'ils sont … des professeurs.

$(\forall x)\ p \quad \rightarrow \quad q$

3. Transcription

$$(\forall x)\,[(Bx \land Cx) \rightarrow Ax] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{(\exists x)\big[(Bx \land Cx) \land \overline{Ax}\big]}$$

Exercice 9
Seuls les membres sont admis.

1. Lexique

Ax = x est membre
Bx = x est admis

2. Structure

Nous retrouvons encore l'expression «**seul**» qui indique une conditionnelle renforcée, donc une condition nécessaire (CN) qui sera placée comme conséquent de l'implication.

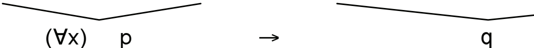
… en allant plus loin…

Ici encore, on peut se demander si la proposition n'exprime pas une condition nécessaire et suffisante (CNS). Lisons la conditionnelle dans les deux sens:
1) «Si je suis admis, alors c'est que je suis membre» = «être membre» est **CN** pour être «admis»

Est-ce qu'on pourrait lire aussi:
2) «Si je suis membre, alors je suis admis» = «être membre» est **CS** pour être «admis»?

Dans ce cas on serait en droit de dire non. En effet, est-ce qu'il **suffit** d'être membre pour être admis? Il y a fort à parier qu'un membre qui se présenterait en état d'ébriété ne serait pas admis.

Pour **tous** les admis on a qu'ils **sont nécessairement** membres.



$(\forall x)$ p → q

3. Transcription

$(\forall x)\,[Bx \rightarrow Ax] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{(\exists x)\left[Bx \wedge \overline{Ax}\right]}$

… en allant plus loin…

L'expression «seul» est un bon exemple pour la polysémie[77] et l'imprécision du langage naturel par opposition au langage logico-mathématique. Dans l'exemple précédent «seul» introduit une condition nécessaire.

Mais prenons la proposition suivante qu'on pourrait trouver dans le langage naturel: «Seuls les triangles sont des trilatères »

Lexique
Ax = x est un triangle
Bx = x est un trilatère

Structure
Ici encore il faut se demander si la proposition n'exprime pas une condition nécessaire et suffisante (CNS). Lisons la conditionnelle dans les deux sens:

1) «Si (une figure géométrique) est un triangle, alors c'est un trilatère» = «être trilatère» est **CN** pour «être un triangle»

Est-ce qu'on pourrait lire aussi:
2) «Si (une figure géométrique) est un trilatère, alors c'est un triangle» = «être un trilatère» est CS pour «être un triangle»?

Dans ce cas la réponse est oui, car ce sera effectivement et dans tous les cas admis. On gardera la CN et aussi la CS, ce qui fait qu'on aura une CNS exprimée par l'équivalence.

Tous les triangles et eux **seuls** sont **nécessairement** trilatères

$(\forall x)$ p $\leftrightarrow$ q

Transcription

$(\forall x)\ [Ax \leftrightarrow Bx] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{(\exists x)\left[\overline{Ax} \wedge Bx\right]} \wedge \overline{(\exists x)\left[Ax \wedge \overline{Bx}\right]}$

Le langage mathématique serait plus précis que le langage courant et formulerait explicitement le sens de la relation entre «triangle» et «trilatère» par un énoncé du genre:
«Un triangle est équivalent à un trilatère».

[77] La multiplicité de sens.

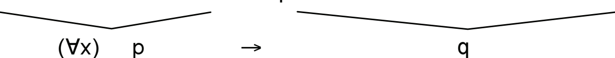
Exercice 10
Parmi les concurrents, personne ne réussira à moins d'être très entraîné.

1. Lexique

Ax = x est concurrent
Bx = x réussit
Cx = x est très entraîné

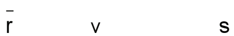
2. Structure

Pour tout concurrent on a qu'il … à moins d'être très entraîné.



$(\forall x)\quad p \quad\rightarrow\quad q$

○ *conséquent q:*
il ne réussit pas **ou** il est très entraîné



$\overline{r} \quad \vee \quad s$

Structure complète:
$(\forall x)\ [p \rightarrow (\overline{r} \vee s)]$

3. Transcription

$(\forall x)\ [Ax \rightarrow (\overline{Bx} \vee Cx)]$
$[\ \Leftrightarrow\ (\forall x)\ [(\overline{Ax} \vee \overline{Bx}) \vee Cx]$ Impl et Ass]
$\Leftrightarrow\ (\forall x)\ [\overline{Ax \wedge Bx} \vee Cx]$ DM
$\Leftrightarrow\ (\forall x)\ [(Ax \wedge Bx) \rightarrow Cx]$ Imp
$\Leftrightarrow\ \overline{(\exists x)\left[(Ax \wedge Bx) \wedge \overline{Cx}\right]}$ Quantification et Ne.Imp

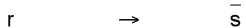
Analyse alternative

Pour tout … on a qu'il ne réussit pas à moins d'être très entraîné.



$(\forall x)\quad p \quad\vee\quad q$

○ *antécédent p:*
si x est concurrent alors il ne réussit pas



$r \quad\rightarrow\quad \overline{s}$

Structure complète:
$(\forall x)\ [(r \rightarrow \overline{s}) \vee q]$

Transcription alternative:

$(\forall x)\ [(Ax \rightarrow \overline{Bx}) \vee Cx]$

$\Leftrightarrow$	$(\forall x)\ [\overline{Ax \wedge Bx} \vee Cx]$	Ne.Imp
$\Leftrightarrow$	$(\forall x)\ [(Ax \wedge Bx) \rightarrow Cx]$	Imp
$\Leftrightarrow$	$\overline{(\exists x)\left[(Ax \wedge Bx) \wedge \overline{Cx}\right]}$	Quantification et Ne.Imp

On constate que les deux analyses produisent finalement les mêmes transcriptions.

… en allant plus loin…

Au lieu de partir de la transcription que nous avons donnée pour «*à moins que (ne)*», à savoir «*ou*», demandons-nous plutôt quel est le sens de cette proposition. Il apparaît vite que «il **faut** être très entraîné pour être un concurrent qui réussit», qu'il y a donc au moins une condition nécessaire.

On aura donc:

Pour tout concurrent qui réussit **il faut** qu'il soit très entraîné.

$(\forall x)\quad p \quad \rightarrow \quad q$

ou encore:

Il n'y a pas de concurrent qui réussisse **et** qui ne soit pas entraîné.

$\overline{(\exists x)}\quad p \quad \wedge \quad \overline{q}$

Est-ce que pour autant il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante? Est-ce que la proposition de départ signifie aussi «*chacun, s'il est très entraîné, est un concurrent qui réussit*». Il n'est pas difficile de voir que ce n'est pas le sens de la proposition originale et donc qu'il ne s'agit pas d'une CNS.

Nous retrouvons encore une fois les deux transcriptions de ci-dessus:

$(\forall x)\ [(Ax \wedge Bx) \rightarrow Cx] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{(\exists x)\left[(Ax \wedge Bx) \wedge \overline{Cx}\right]}$

Exercice 11

Tous les jeunes ne viendront pas, mais toutes les femmes non plus.

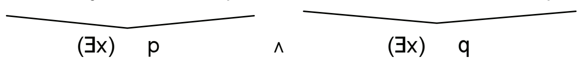
1. Lexique

Ax = x est jeune
Bx = x vient
Cx = x est une femme

2. Structure

Si l'on regarde bien la proposition, on voit clairement qu'il y a deux quantifications reliées par «**mais**».
On aura donc:

Tous les jeunes ne … pas **et** toutes les femmes ne … pas.



$(\exists x)\ p \quad \wedge \quad (\exists x)\ q$

3. Transcription

$(\exists x)\ [Ax \wedge \overline{Bx}] \wedge (\exists x)\ [Cx \wedge \overline{Bx}]$

S'agissant d'existentielles, il n'y a pas moyen de réduire cette expression puisque
$(\exists x)\ [(Ax \wedge Cx) \wedge \overline{Bx}]$ exprimerait l'idée «il y a des jeunes femmes qui ne viennent pas» ce qui n'est pas le sens de la phrase
et
$(\exists x)\ [(Ax \vee Cx) \wedge \overline{Bx}]$ pourrait signifier «il y a soit des jeunes, soit des femmes qui ne viennent pas», excluant éventuellement par là l'une ou l'autre catégorie, alors que la proposition initiale dit bien qu'il y en a des deux catégories qui ne viennent pas.

Exercice 12

Tous sauf les lecteurs du 'Monde' sont mal informés.

1. Lexique

Ax = x est lecteur du «Monde»
Bx = x est bien informé

2. Structure

Dans l'expression «tous … sauf» se cache en fait un double sens.

D'une part on a « Si l'on n'est pas lecteur du 'Monde', alors on est mal informé», mais aussi «si l'on est lecteur du 'Monde', alors on est bien informé».

Puisqu'on retrouve les deux sens, transcrivons-les:
Si l'on **n'est pas** lecteur …, alors on n'est **pas bien** informé

$(\forall x)\ \overline{p} \quad \rightarrow \quad \overline{q}$

et encore:
Si l'on **est** lecteur du 'Monde', alors on **est** bien informé.

$(\forall x)\ p \quad \rightarrow \quad q$

Il faut ensuite réunir ces deux sens en une seule formule par une conjonction.

3. Transcription

$(\forall x)\ [\,\overline{Ax} \to \overline{Bx}\,] \wedge (\forall x)\ [Ax \to Bx]$

Or, par contraposition du premier terme on a:

$(\forall x)\ [\,\overline{Ax} \to \overline{Bx}\,] \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)\ [Bx \to Ax]$

et on pourra écrire plus simplement:

$(\forall x)\ [Ax \leftrightarrow Bx]$

Ceci signifie en fait que «lire le 'Monde'» est la CNS pour «être bien informé», ce qui correspond bien au sens de la proposition à transcrire.

Exercice 13

Les Français et les Italiens seront les bienvenus, mais tous ne viendront pas.

1. Lexique

Ax = x est Français
Bx = x est Italien
Cx = x est bienvenu
Dx = x vient

2. Structure

A y regarder de près, on voit qu'il y a deux quantifications reliées par «**mais**».

On aura donc:

Tous les .... seront les bienvenus, **mais tous** ... **ne** viendront **pas.**

$(\forall x) \quad p \to q \qquad \wedge \qquad \overline{(\forall x)} \quad p \to r$

Il faudra reprendre dans la deuxième quantification l'indication qui délimite x, à savoir que ce sont les Français et les Italiens.

3. Transcription

$(\forall x)\ [(Ax \vee Bx) \to Cx] \wedge \overline{(\forall x)[Ax \vee Bx) \to Dx]}$

respectivement: $(\exists x)\ [(Ax \vee Bx) \wedge \overline{Dx}\,]$ pour le deuxième terme.

La transcription de «tous les Français et Italiens seront les bienvenus» par

$(\forall x)\ [(Ax \vee Bx) \to Cx]$ semble étonnante.

Est-ce qu'on n'aurait pas dû mettre:
$(\forall x)\ [(Ax \wedge Bx) \rightarrow Cx]$?

Non, car ceci signifierait: «tout individu qui est Français et Italien **à la fois** est le bienvenu», donc seulement ceux à double nationalité le seraient!

On aurait pu mettre:
$(\forall x)\ [Ax \rightarrow Cx] \wedge (\forall x)\ [Bx \rightarrow Cx]$

qui est équivalent à notre
$(\forall x)\ [(Ax \vee Bx) \rightarrow Cx]$ par distributivité[78].

[78] cf. LL, avant-dernière distributivité.

Exercice 14

… en allant plus loin…
et pour voir jusqu'où l'on pourrait aller…

Quelques membres seulement de clubs français ou italiens viendront.

Lexique
Ax = x est membre d'un club français
Bx = x est membre d'un club italien
Cx = x vient

Structure
«Quelques … **seulement**» est une expression qui cache elle aussi deux sens différents: d'une part il est dit que «*quelques membres … viendront*» mais il est dit aussi que «*quelques membres … ne viendront pas*».

La différence entre «*quelques … viendront*» et «*quelques **seulement** … viendront*» réside dans la limitation que le terme «*seulement*» impose à «*quelque*». L'affirmation «*quelques membres viendront*» comporte seulement une limitation vers le bas: «*il y a **au moins** un membre qui viendra*» **ce qui laisse ouverte la possibilité qu'ils viennent tous**. La limitation imposée par «*seulement*» exclut donc qu'ils viennent tous.

On aura donc:
Quelques … viendront **et** quelques … ne viendront pas.

$$(\exists x)\ \ p \wedge q \qquad \wedge \qquad (\exists x)\ \ p \wedge \overline{q}$$

Transcription
$(\exists x)\ [(Ax \vee Bx) \wedge Cx\ ] \wedge (\exists x)\ [(Ax \vee Bx) \wedge \overline{Cx}\ ]$

Il n'y a pas moyen de réduire cette expression puisque «*ceux qui existent et qui viennent*» sont forcément des individus différents de «*ceux qui existent et qui ne viennent pas*»!

2.3.2.3 APPLICATIONS [PTR] [79]

PTR 1 Parmi les députés de l'Assemblée Nationale, il y a des républicains et des socialistes, mais nul n'est écologiste. Aucun républicain ni aucun socialiste ne voudra empêcher la mise en service d'une centrale nucléaire aux frontières d'un pays ami. Donc, si seul un écologiste veut empêcher sa mise en service, alors si un individu veut empêcher son fonctionnement, cet individu n'est certainement pas un député de l'Assemblée Nationale. 1988 (2)

PTR 2 Aucun candidat ne sera élu à moins d'être honnête et compétent. Tous les candidats ne sont pas en même temps honnêtes et compétents. Les candidats qui n'accepteront jamais de pots-de-vin sont tous honnêtes, mais ils ne sont pas tous compétents. Parmi les candidats qui accepteront des pots-de-vin, il y en a qui arborent un air d'honnêteté sans être honnêtes, et il y en a qui sont compétents sans arborer un air d'honnêteté et sans être honnêtes. Donc, il est faux de dire qu'aucun candidat qui n'accepterait jamais de pots-de-vin ne soit élu. ***(Univers du discours: x = candidat)*** 1989 (1)

PTR 3 Tous les habitants de cette ville, à l'exception des agents secrets, sont membres d'un club enregistré. Les habitants ne sont pas tous membres d'un club secret. On n'est pas suspect, à moins d'être membre d'un club secret. La plupart des personnes suspectes font partie du E.T. - club. Ceux parmi les membres du E.T. - club qui en font secrètement partie sont des espions. Il est faux que seuls les agents secrets soient des espions. John fait partie du E.T. - club, mais John n'est pas suspect. John est donc un agent secret.
(Univers du discours: x = habitant de cette ville) 1989 (2)

PTR 4 Tous ceux qui visitent les musées ou bien éprouvent une satisfaction désintéressée ou bien estiment la valeur marchande des objets exposés. Seuls ceux qui ont étudié l'esthétique de Kant éprouvent une satisfaction désintéressée. On ne peut à la fois s'intéresser à la culture et estimer la valeur marchande des objets exposés. Il y a des collectionneurs d'art qui visitent les musées, mais qui n'ont pas étudié l'esthétique de Kant. Donc, quelques collectionneurs d'art ne s'intéressent pas à la culture. 1990 (1)

PTR 5 Parmi les passionnés de la lecture de Heidegger, il y a des admirateurs et des détracteurs de sa philosophie, mais il n'y a personne qui soit un esprit impartial. Aucun admirateur ni aucun détracteur

[79] Pour 1994 la lettre *n* réfère au nouveau, et *a* à l'ancien régime d'examen (où l'année n'était pas mise en compte).

de sa philosophie n'est capable de se prononcer objectivement sur les relations entre cette philosophie et l'attitude peu claire de Heidegger face au national-socialisme. Donc, si seul un esprit impartial peut se prononcer objectivement sur ces relations, celui qui peut le faire n'est certainement pas un passionné de la lecture de Heidegger. 1990 (2)

PTR 6 Les seuls spécialistes comprendront cet ouvrage. Cependant tous (les spécialistes) ne le liront pas et ceux qui le liront ne le comprendront pas tous. Quelques-uns (d'entre eux) prétendront qu'ils ont compris l'ouvrage, alors qu'ils ne l'ont même pas lu. On ne comprend l'ouvrage que si on l'a étudié à fond. Donc, quelques-uns (des spécialistes) qui liront l'ouvrage ne l'étudient pas à fond. 1991 (1)

PTR 7 Ceux qui raisonnent correctement n'ont pas tous suivi un cours de logique et ceux qui ont suivi un cours de logique ne raisonnent pas tous correctement. Pour obtenir de bonnes notes en logique, il faut être attentif en classe et ne pas détester son prof de philo. Les élèves qui détestent leur prof de philo ou qui ont un voisin bavard ne sont pas attentifs en classe, à moins qu'ils ne se passionnent pour la logique. Il est par conséquent faux que seuls les élèves qui détestent leur prof de philo raisonnent incorrectement. 1992 (1)

PTR 8 Il y a des élèves qui travaillent tard le soir sans être fatigués. Seuls les élèves qui ne sont pas fatigués obtiennent de bons résultats à l'examen ou jouissent d'une bonne santé. Certains élèves sortent le soir à moins de ne pas jouir d'une bonne santé. Donc, pour que les élèves obtiennent de bons résultats à l'examen, il faut qu'ils sortent le soir. ***(Univers du discours x = élève)*** 1992 (2)

PTR 9 Parmi les hommes politiques, il y en a qui réussissent sans être fiables. On ne saurait réussir sans faire de promesses démagogiques. Seuls les hommes politiques qui ne font pas de promesses démagogiques ou qui ne se prêtent pas au dialogue sont fiables. Quel homme politique ne se prête pas au dialogue avec ses électeurs ? Il est faux que ceux qui font des promesses démagogiques respectent leurs électeurs. Aucun homme politique ne se prête au dialogue, à moins de respecter les électeurs. Il en découle que les hommes politiques fiables, sauf ceux qui ne se prêtent pas au dialogue, respectent leurs électeurs. 1993 (1)

PTR 10 Tous les étudiants n'apprécient pas Kant. On ne peut pas apprécier Kant sans avoir lu la 'Critique de la raison pure'. Seuls les étudiants assidus parviennent à lire la 'Critique de la raison pure' sans

se décourager. Ceux des étudiants qui se découragent ne lisent pas la 'Critique de la raison pure' à moins d'y être obligés. Ils n'apprécieront pas Kant s'ils ne lisent la 'Critique de la raison pure' que s'ils y sont obligés. Il est par conséquent faux que les étudiants qui ont lu la 'Critique de la raison pure' apprécient Kant. 1993 (2)

PTR 11 Certains spectateurs viendront par le train, d'autres en voiture. Seuls ceux venant de très loin prendront l'avion. Aucun de ceux venant en voiture ne pourra faire le voyage aller-retour en un jour, alors que tel est le cas pour tous ceux qui prennent l'avion et pour la plupart de ceux qui prennent le train. Quiconque ne peut pas effectuer un voyage aller-retour en un jour doit passer une nuit à l'hôtel, à moins de loger chez des gens qu'il connaît. Aucun des spectateurs venant par le train ne loge chez des gens qu'il connaît. Donc, les hôtels accueilleront certains spectateurs venus par le train. ***(Univers du discours: x = spectateur)*** 1994 (1n)

PTR 12 Parmi les propositions dont l'existence est admise avant Kant, il y a des propositions analytiques a priori, il y en a d'autres qui sont synthétiques a posteriori, mais il n'y en a aucune qui soit synthétique a priori. Ni les propositions a posteriori ni les propositions analytiques ne peuvent servir de fondement théorique à la physique de Newton. Donc, si seules les propositions synthétiques a priori peuvent servir de fondement à la physique de Newton, alors, si une proposition peut jouer ce rôle, elle n'est pas admise avant Kant. ***(Univers du discours: x = proposition)*** 1994 (1n-ratt.)

PTR 13 Tous ceux qui regardent souvent la télévision sont amorphes et peu intéressants. Quelques élèves ne regardent pas souvent la télévision mais sont pourtant amorphes. De toute façon la plupart des élèves regardent souvent la télévision. A ceux qui sont amorphes il suffit de recommander la lecture des philosophes pour les faire changer d'état. Or, les élèves lisent les philosophes à moins qu'ils ne suivent pas les conseils de leurs professeurs. Donc, les élèves ne sont pas amorphes si et seulement s'ils ne regardent pas souvent la télévision ou s'ils lisent les philosophes. 1994 (1a)

PTR 14 Dans une certaine ville, tous les vieux sont pourchassés par des bandes de jeunes féroces. Quiconque a passé le cap des 40 ans passe pour vieux. Le plus souvent, si un vieux est ainsi pourchassé, il tombe aux mains de ses bourreaux et trouve la mort; mais parfois une de ces personnes réussit à échapper à ses poursuivants. Jean a 46 ans. S'il court assez vite, il échappera à ces voyous à moins que le sort ne s'acharne contre lui. Or, il n'a jamais de chance. Donc, s'il est pourchassé, soit qu'il ne coure pas assez

vite, soit qu'il ait de la malchance, il trouvera la mort. *(Inspiré du récit de Dino Buzzati: Cacciatori di vecchi)*
(Univers du discours: x = habitant de la ville) 1994 (1a-ratt.)

PTR 15 Tous les élèves de 1ère ne sont pas membres de l'Association contre les professeurs. Les seuls élèves de la section touristique ne sont pas membres de l'association en question. On n'échoue pas à l'examen à moins de faire partie de l'Association contre les professeurs ou de ne pas se préparer en logique. Les élèves de 1ère ne se préparent en logique que s'ils ne sont pas élèves de la section touristique. Donc, quelques élèves qui se sont préparés en logique et qui font partie de l'Association contre les professeurs n'échoueront pas à l'examen, mais tous les élèves de la section touristique réussiront à l'examen. 1994 (2n)

PTR 16 Tous les hommes sont des primates. Si quelques primates n'ont pas de poils, alors rien de ce qui est répertorié dans ce livre n'est un primate. Il n'y a que les hommes qui soient des mammifères répertoriés. Il faut en conclure que tout homme non poilu, s'il est un mammifère, n'est pas répertorié dans ce livre. 1994 (2a)

PTR 17 Tout candidat sera déçu à moins qu'il ne soit reçu. Seuls les candidats qui ont des connaissances précises seront reçus. Certains candidats sans connaissances précises sont de bons orateurs. Donc, quelques candidats étant de bons orateurs seront déçus.
(Univers du discours: x = candidat) 1995 (1)

PTR 18 Toute modification qui diminue les chances de survie des pilotes en cas d'accident est l'œuvre d'un sadique ou d'un incompétent. Pareille œuvre ne sert pas les intérêts des pilotes. Toute œuvre de sadique est condamnable. Un ingénieur sert bien son patron si et seulement s'il travaille pour le bien des pilotes. Pour bien servir son patron, il faut en outre être compétent. Quelques ingénieurs font leur travail au détriment des pilotes. Donc, il y en a (des ingénieurs) qui manquent de bien servir leur patron ou il y en a (des ingénieurs) qui sont incompétents. 1995 (2)

PTR 19 Aucun requin ne doute qu'il soit bien équipé. Un poisson qui ne sait pas danser le menuet est digne de mépris. Aucun poisson n'est tout à fait sûr d'être bien équipé s'il n'a pas trois rangées de dents. Tous les poissons, excepté les requins, sont gentils avec les enfants. Aucun poisson corpulent ne sait danser le menuet. Donc, un poisson qui possède trois rangées de dents ne mérite aucun mépris. *(Lewis Carroll: Logique sans peine)* 1997 (2)

PTR 20 Seuls les cambrioleurs qui ne sont pas gauchers seront contrôlés. Tous les invités qui ont été contrôlés sont gauchers ou il n'y a personne qui soit contrôlé et qui ne soit ni gaucher, ni invité. Olivier est contrôlé quoiqu'il ne soit ni invité, ni gaucher. Donc, tous les invités cambrioleurs sont des gauchers. 1998 (1)

PTR 21 Seuls les êtres sachant nager peuvent vivre dans l'eau. Les quadrupèdes vivent dans l'eau ou sur la terre ferme. Certains animaux sont quadrupèdes, mais ne savent pas nager. Avec des branchies, on ne peut vivre sur terre. Donc, il y a des animaux qui n'ont pas de branchies. ***(Univers du discours: x = être / animal)*** 1998 (2)

PTR 22 Une part des lycéens sont de bons musiciens. On ne réussit au concours musical que si on répète régulièrement, à moins d'être exceptionnellement doué. Or, si les lycéens sont obligés de faire beaucoup d'exercices de logique, ils ne répètent pas régulièrement. Quelques-uns d'entre eux sont obligés de faire beaucoup d'exercices de logique s'ils préparent l'examen de fin d'études secondaires. Donc, il est vrai que certains lycéens ne réussiront pas au concours musical s'ils préparent l'examen de fin d'études secondaires. 1999 (1)

PTR 23 Aucune proposition n'est à la fois synthétique et analytique, ni à la fois a priori et a posteriori. Une proposition a posteriori dépend toujours de l'expérience sensible, une proposition a priori par contre n'en dépend jamais. Seules les propositions synthétiques constituent d'authentiques connaissances. Il n'est pas vrai que toute proposition a priori soit aussi une proposition analytique. Donc, certaines propositions ne dépendent pas de l'expérience sensible, tout en constituant d'authentiques connaissances.
(Univers du discours: x = proposition) 1999 (2)

PTR 24 Aucun athlète ne remportera de victoire à moins de s'entraîner régulièrement. Ceux des athlètes qui s'entraînent régulièrement sont en bonne santé et aiment le sport. Beaucoup sont aimés du public s'ils remportent des victoires. Un athlète remporte des victoires si et seulement s'il s'entraîne régulièrement et s'il a une grande force physique. Donc, il est faux que les athlètes qui ont une grande force physique et s'entraînent régulièrement ne soient pas assez aimés du public. ***(Univers du discours: x = athlète)*** 2000 (1)

PTR 25 On ne saurait être jeune et respecté de ses copains sans maîtriser le Skateboard ou posséder une Playstation. Celui qui prétend maîtriser le Skateboard devra apporter des preuves. Or, tous les jeunes ne maîtrisent pas ce sport tout en prétendant le maîtriser. Quel

enseignant ne s'intéresse pas aux jeunes! Celui qui s'intéresse aux jeunes risque de rencontrer des révoltés, à moins de ne fréquenter que certains quartiers de la ville. Il en résulte que certains enseignants rencontreront des jeunes révoltés si les jeunes ne maîtrisent pas le Skateboard. ***(Univers du discours: x = jeune)*** 2000 (2)

PTR 26 On aime la musique seulement s'il n'est pas vrai qu'on écoute à la fois Mozart et pas la musique Rap. Il n'est pas vrai que les amateurs de musique jouent tous au Game-Boy, mais tous ceux qui écoutent le Rap, dansent et jouent au Game-Boy. Ce n'est que si on écoute Mozart qu'on n'écoute pas le Rap et qu'on ne danse pas. Donc, il y a au moins un individu qui danse! 2001 (1)

PTR 27 Parmi les joueurs de notre équipe nationale de football, il y en a qui manquent de condition physique, il en existe d'autres qui sont trop âgés, mais il n'y en a aucun qui soit capable de jouer comme Zidane. Ni ceux qui manquent de condition physique, ni ceux qui sont trop âgés ne peuvent nous faire gagner le moindre match. Seul quelqu'un capable de jouer comme Zidane peut nous faire gagner un match, mais les seuls qui peuvent jouer comme lui sont français ou italiens. Donc, si quelqu'un peut jouer comme Zidane, il ne fait pas partie de notre équipe nationale. 2001 (2)

PTR 28 Si seuls les philosophes ne sont pas des poètes et si les seuls à pouvoir nous émouvoir sont les poètes, alors il est faux qu'il y ait un philosophe capable de nous émouvoir. S'il y a des joueurs de football qui peuvent nous émouvoir, alors il est faux que tous les joueurs de football soient des philosophes. Donc, si les penseurs sérieux sont tous des philosophes et si tous les joueurs de football ne sont pas des philosophes, alors il est vrai qu'il y a au moins un joueur de football qui est poète sans être un penseur sérieux.
2002 (1)

PTR 29 Tous les alpinistes qui connaissent les dangers du monde alpin sont prudents. Personne n'est alpiniste à moins d'être capable de participer à un débat philosophique. Messner a fait l'ascension de l'Everest. Il n'y a pas d'alpiniste qui saurait participer à un débat philosophique sans connaître les dangers du monde alpin. Personne, sauf un alpiniste, n'a jamais gravi le mont Everest. Donc, Messner est prudent. 2002 (2)

PTR 30 Seuls les politiciens qui ne sont pas corrompus seront élus. Tous les cardiaques élus sont corrompus, mais il n'y a personne qui soit à la fois cardiaque, non-élu et non-corrompu. Dupond est élu bien

qu'il ne soit ni cardiaque, ni corrompu. Donc, tous les politiciens cardiaques sont corrompus. 2003 (1)

PTR 31 Il n'est pas vrai que tous les Français sont hostiles à la guerre en Irak, mais il est vrai que très peu de Français sont favorables à cette guerre et parmi eux se trouvent quelques philosophes. Or, un philosophe authentique s'oppose à toute guerre à moins qu'il ne soit obligé de se défendre contre une agression extérieure. Cependant il ne suffit pas de s'opposer à toute guerre pour être un philosophe authentique. Il va de soi que les philosophes français ne sont pas obligés de se défendre contre une agression extérieure. Il faut donc admettre qu'il existe en France des philosophes qui ne sont pas des philosophes authentiques. 2003 (2)

PTR 32 Seuls ceux qui comprennent la logique peuvent faire des déductions. Les êtres qui raisonnent font des déductions ou écrivent des poèmes. Certains élèves de 1ère raisonnent, mais ne comprennent pas la logique. Ceux qui font beaucoup d'exercices de logique n'écrivent pas de poèmes. Voilà pourquoi il y a des élèves de 1ère qui ne font pas beaucoup d'exercices de logique. 2004 (1)

PTR 33 Il y a des gens qui aiment les films de Fellini, et ce sont des excentriques; mais par ailleurs seuls ceux qui ont horreur des films avec Jean-Claude Van Damme sont des amateurs de l'œuvre de Fellini. On est un excentrique ou très intelligent, à moins d'aimer regarder la télé. On peut en conclure que si les seuls amateurs de Jean-Claude Van Damme aiment regarder la télé, alors tous ceux qui aiment les films de Fellini n'aiment pas regarder la télé.

2004 (2)

PTR 34 Pour pouvoir choisir le métier d'enseignant, il faut décrocher le certificat d'études, et pour décrocher ce certificat, il faut tant comprendre qu'apprendre les lois logiques. Seuls les élèves qui travaillent assidûment, apprennent les lois logiques. Cependant, quelques élèves apprennent les lois logiques sans vraiment les comprendre. Serge fait partie de ces élèves. Donc, Serge ne choisira pas le métier d'enseignant. ***(Univers du discours: x = élève)***

2005 (1)

PTR 35 Les candidats à ce poste doivent se soumettre à un test psychométrique. Pour accéder au poste en question, ils doivent faire preuve d'esprit conservateur, donc ne pas avoir trop d'imagination. Certains candidats ont dessiné (dans ce test) des arbres luxuriants et des monstres imaginaires, faisant ainsi preuve d'une imagination excessive. Celui qui a trop d'imagination, ne peut pas

être conservateur. Donc, les candidats qui ont fait des dessins très imaginatifs n'auront pas le poste en question.
2005 (2)

PTR 36 Tous les démocrates ne sont pas libéraux et certains libéraux ne sont pas démocrates. Quiconque refuse la séparation des pouvoirs n'est pas libéral. La séparation des pouvoirs est acceptée par un certain nombre de démocrates. Aucun partisan de la séparation des pouvoirs n'est en faveur du despotisme. Donc, certains démocrates qui ne sont pas libéraux s'opposent au despotisme.
2006 (1)

PTR 37 Pour penser il faut avoir un cerveau. Il n'est pas faux de dire que tout cerveau est nécessairement composé d'une multitude de cellules. Parmi les organismes, il y a des multicellulaires, des pluricellulaires et des unicellulaires. Les bactéries sont des unicellulaires. Donc, les bactéries ne pensent pas, à moins qu'elles n'aient un cerveau qui ne soit pas un ensemble de cellules. 2006 (2)

PTR 38 Parmi les imbéciles, il y a des optimistes et il y a des pessimistes. Seuls ceux qui réfléchissent au sens de la vie ne sont pas des imbéciles. On ne peut à la fois réfléchir au sens de la vie et être optimiste. Ceux qui réfléchissent au sens de la vie ne sont pas tous heureux. Ainsi, un optimiste est un imbécile heureux et un pessimiste est un imbécile triste. *(D'après Georges BERNANOS)* 2007 (2)



2.4 ARBRES

2.4.1 Propositions

2.4.1.1 PRINCIPE

La méthode des arbres (MA) est une méthode rapide et efficace pour vérifier si un raisonnement est valide ou non.

Prenons un raisonnement simple:
$p \rightarrow q$
$p \quad \vdash \quad q$

Pour vérifier un tel raisonnement par la méthode des tables de vérité, il faudrait d'abord le formaliser en une seule proposition complexe[80] de la forme:
$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

car la 1ère prémisse ensemble avec la 2ème entraîne la conclusion,

et la table serait la suivante:

	p	q	p → q	(…) ∧ p	{….} → q
1	1	1	1	1	1
2	1	0	0	0	1
3	0	1	1	0	1
4	0	0	1	0	1

Or, avec la multiplication des propositions élémentaires, le nombre de lignes double à chaque fois selon la formule 2^x (avec x = nombre de propositions élémentaires), ce qui donnerait un tableau de 1024 lignes pour 10 propositions élémentaires! Nous voyons que ceci n'est guère efficace.

Mais nous remarquons ceci: tout raisonnement valide peut s'écrire sous forme d'une proposition complexe de la forme:

prémisses → conclusion

qui est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions élémentaires qui la composent.

Une telle proposition, toujours vraie indépendamment de la vérité des propositions élémentaires, est appelée une **tautologie**.

---
[80] …appelée implication associée.

1) Comme on suppose que les prémisses sont vraies par définition[81] et
2) puisqu'on sait qu'un raisonnement valide est une proposition complexe qui est toujours vraie,
3) on sait que la conclusion doit être vraie[82],

La méthode des arbres consiste tout simplement à admettre **par hypothèse**:

- que le raisonnement ne soit pas valide
- et que **la conclusion soit donc fausse** (puisque les prémisses ne peuvent pas être en cause).

Ainsi on aura donc au départ de l'arbre:

- des énoncés vrais par définition, *les prémisses* **et**
- un énoncé vrai par hypothèse, *la conclusion niée*.

Pour faire la vérification, on décomposera chaque proposition complexe en ses éléments plus simples. La vérité d'une proposition complexe implique en effet une autre vérité (ou de possibles vérités) concernant ses composantes élémentaires.

Par exemple: si $p \wedge q$ en tant que proposition complexe est vraie, ceci signifie forcément que p doit être vrai **et** que q doit être vrai (vu la définition de $\wedge$ par les tables de vérité [voir les Règles des arbres pour tous les connecteurs]).

Deux cas sont alors possibles:

1. l'hypothèse de la fausseté de la conclusion **mène dans tous les cas à des contradictions**: ceci signifie qu'on ne peut pas admettre à la fois l'hypothèse et la vérité des prémisses et que **donc il faut admettre le contraire de l'hypothèse (= la conclusion est vraie)**, puisque la vérité des prémisses ne peut être mise en cause.

2. l'hypothèse ne produit **pas toujours des contradictions** (des branches restent ouvertes): ceci équivaut à affirmer que le contraire de l'hypothèse est compatible, du moins pour certaines valeurs, avec les prémisses et que donc **la conclusion n'est pas compatible avec les prémisses (= la conclusion est fausse)**.

Prenons notre exemple de tout à l'heure:

$p \rightarrow q$

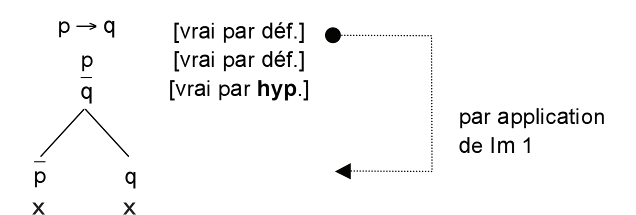
$p \qquad \vdash \quad q$

---

[81] Le logicien n'est pas en mesure de décider si p.ex. $A \rightarrow B$ est vrai, puisqu'il ignore tout de la signification de l'expression qui n'est qu'une structure!

[82] Car si l'antécédent est vrai et le conséquent est faux, toute l'implication est fausse (cf. table de vérité pour $\rightarrow$).

Voici l'arbre correspondant:



Chaque branche aboutit à une contradiction par rapport à ce qui a été admis par définition ou par hypothèse plus haut dans l'arbre.

Nous voyons que la négation de la conclusion se solde uniquement par des contradictions à l'intérieur de l'arbre et qu'on ne peut donc admettre cette hypothèse. Admettre la conclusion niée nous forcerait à admettre des absurdités par rapport à notre système (p à la fois vrai et faux), donc la conclusion doit être vraie[83].

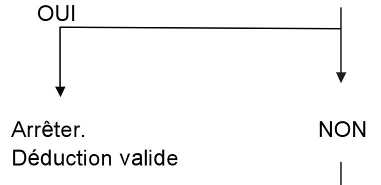
[83] Le raisonnement prouvé ici sera appelé plus tard une déduction par modus ponens.

2.4.1.2 PROCÉDURE[84]

Etablir la liste des prémisses avec la négation de la conclusion.

Eliminer toutes les doubles négations. Clore (X) chaque branche qui contient à la fois une proposition et sa négation.

Est-ce que toutes les branches sont closes?

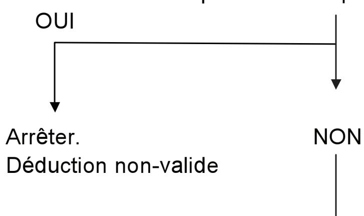


OUI

Arrêter.
Déduction valide

NON

Est-ce que toutes les propositions ont été utilisées?



OUI

Arrêter.
Déduction non-valide

NON

Choisir une proposition. Marquer comme utilisée. Utiliser la règle de décomposition **[RA]** adéquate. Ecrire la proposition décomposée sous **chaque** branche restée ouverte en dessous d'elle.

---

[84] Ce tableau s'inspire de celui de JEFFREY p. 68

!!Notations obligatoires!!

Il faut marquer les expressions utilisées en:

- les cochant,
- les numérotant, ce qui permettra de mieux reconstituer la vérification.

Il faut encore:

- indiquer clairement (p.ex. une série de points) les branches restées ouvertes,
- noter le résultat de la vérification en toutes lettres.

2.4.1.3 CONSEILS

Pour la vérification par la méthode des arbres on suivra les principes suivants:

- éviter d'avoir trop d'embranchements en:
  - utilisant d'abord les expressions ne produisant pas de branches (conjonction, disjonction niée, implication niée),
  - en utilisant en priorité les expressions dont un terme au moins permettra de clôturer une branche,
- se donner suffisamment de place pour résoudre l'exercice sur une page pour que l'arbre reste «lisible».

Toutefois, la vérification ne dépend pas de l'ordre dans lequel on décompose les différentes expressions! La démarche peut être faite de manière purement mécanique et pourrait être confiée à un automate (cf. la procédure ci-dessus).

EXERCICES

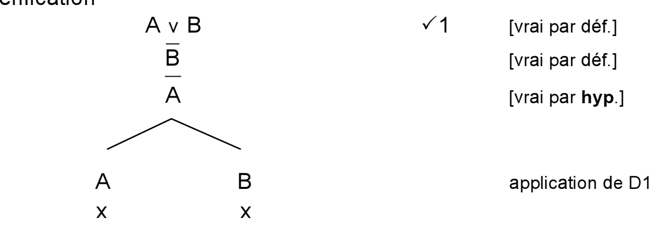
2.4.1.4 EXERCICES COMMENTÉS

Exercice 1

Raisonnement

$A \vee B; \bar{B} \quad \vdash \quad A$ (= *syllogisme disjonctif*)

Arbre de vérification



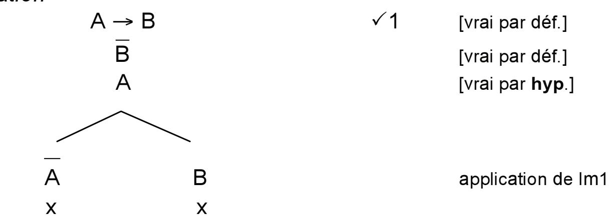
Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

Exercice 2

Raisonnement

$A \rightarrow B; \bar{B} \quad \vdash \quad \bar{A}$ (= *modus tollens*)

Arbre de vérification



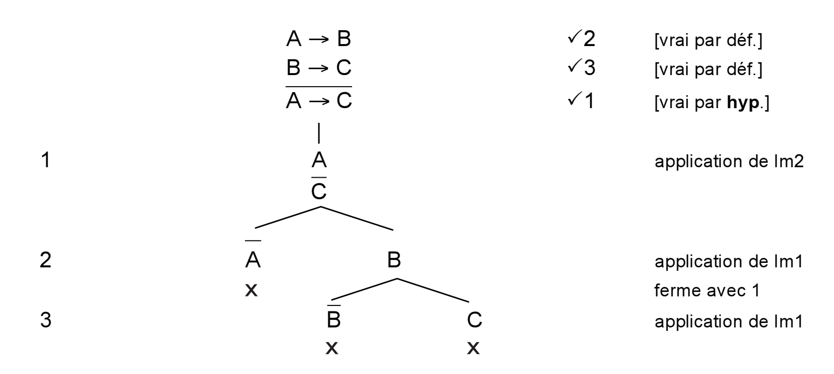
Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

Exercice 3

Raisonnement

$A \rightarrow B;\ B \rightarrow C \quad \vdash \quad A \rightarrow C$ (= *syllogisme hypothétique*)

Arbre de vérification



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

Exercice 4

Raisonnement

$A \rightarrow B;\ \overline{A} \quad \vdash \quad \overline{B}$ (= paralogisme [pseudo raisonnement] courant) [85]

Arbre de vérification

	$A \rightarrow B$	✓1	[vrai par déf.]
	$\overline{A}$		[vrai par déf.]
	$\overline{\overline{B}}$		[vrai par **hyp**.]
1	$\overline{A}$ ¦ B ¦		application de Im1

Toutes les branches ne sont pas clôturées, le raisonnement n'est pas valide.

[85] Ceci est la preuve de la non validité du raisonnement dans le Faust de Goethe (cf. 1.2.2)!

Exercice 5

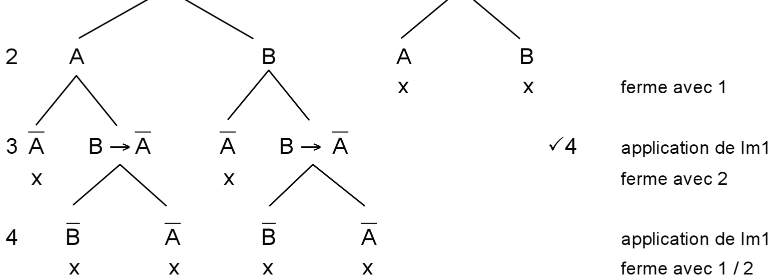
Raisonnement

$A \rightarrow (B \rightarrow \overline{A})$; $A \leftrightarrow B$; $\vdash$ $\overline{A} \wedge \overline{B}$

Arbre de vérification

$A \rightarrow (B \rightarrow \overline{A})$	✓3	[vrai par déf.]
$A \leftrightarrow B$	✓1	[vrai par déf.]
$\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$	✓2	[vrai par hyp.]

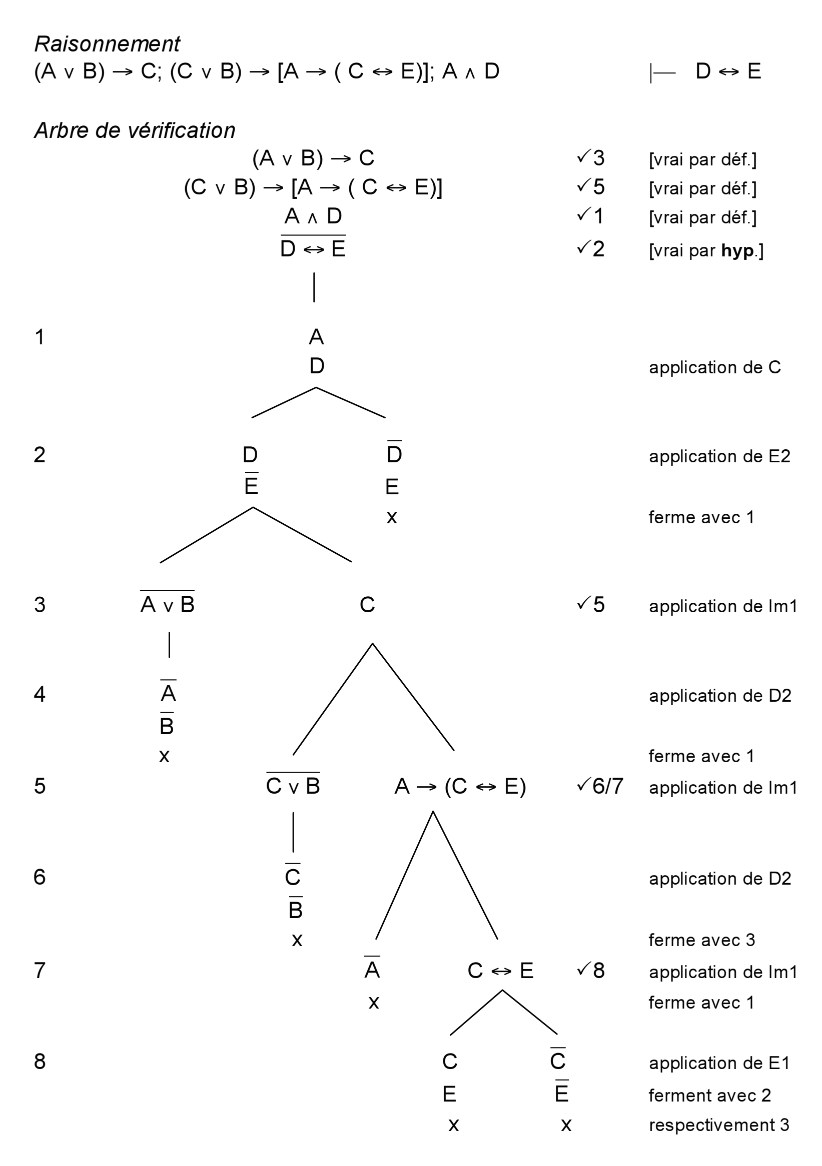
1 — A, B | $\overline{A}$, $\overline{B}$ — application de E1



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

EXERCICES

Exercice 6



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

2.4.1.5 APPLICATIONS [MA]

MA 1 $\overline{A \rightarrow B} \vee (C \leftrightarrow D)$; $(\overline{A} \vee \overline{B}) \rightarrow \overline{A \vee B}$
1988 (1) $\vdash$ $\overline{C} \vee D$
valide

MA2 $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (C \wedge D)$; $(\overline{C} \rightarrow C) \wedge (E \rightarrow D)$
1988 (2) $\vdash$ $E \rightarrow (A \rightarrow B)$
valide

MA3 $\overline{A}$
1989 (1) $\vdash$ $[(B \leftrightarrow C) \leftrightarrow A] \leftrightarrow \overline{B \leftrightarrow C}$
valide

MA 4 $A \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow D]$; $(A \leftrightarrow \overline{D}) \wedge \overline{D \wedge \overline{A}}$
1989 (2) $\vdash$ $(\overline{C} \rightarrow E) \rightarrow E$
valide

MA 5 $P \rightarrow (\overline{Q} \vee R)$; $\overline{S} \rightarrow (P \vee R)$; $P \leftrightarrow Q$
1990 (1) $\vdash$ $S \vee R$
valide

MA 6 $\overline{M}$
1990 (2) $\vdash$ $[(P \rightarrow Q) \rightarrow M] \leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$
valide

MA 7 $A \rightarrow B$; $(\overline{A} \vee C) \rightarrow \overline{D}$; $\overline{E} \rightarrow (D \vee B)$; $\overline{E} \vee \overline{F}$
1991 (1) $\vdash$ $\overline{B} \rightarrow \overline{F}$
valide

MA 8 $A \rightarrow (\overline{B} \wedge C)$; $(B \wedge A) \vee \overline{C}$
1991 (2) $\vdash$ $\overline{A \wedge C}$
valide

MA 9 $A \rightarrow \overline{B}$; $(B \vee \overline{C}) \rightarrow (\overline{A} \vee B)$; $A \leftrightarrow D$
1992 (1) $\vdash$ $\overline{D} \vee C$
valide

MA10 $P \leftrightarrow R$; $(S \vee T) \rightarrow P$; $R \wedge Q$; $\overline{T}$
1992 (2) $\vdash$ $R \rightarrow \overline{P}$
non-valide

MA 11 $(A \rightarrow B) \rightarrow C;\ (\overline{C} \wedge D) \vee E;\ E \rightarrow (\overline{E} \wedge F)$

1993 (1) $\vdash\ B \rightarrow F$

valide

MA 12 $(A \vee B) \rightarrow \overline{A \rightarrow \overline{B}};\ \overline{\overline{A} \vee B} \vee (C \leftrightarrow D)$

1993 (2) $\vdash\ C \rightarrow D$

valide

MA 13 $(A \vee B) \rightarrow \overline{C};\ (A \vee B) \leftrightarrow \overline{D}$

1994 (1n) $\vdash\ D \rightarrow (A \rightarrow C)$

non-valide

MA 14 $A \leftrightarrow (B \rightarrow C);\ (B \wedge D) \vee \overline{B \vee D};\ (\overline{D \rightarrow C} \wedge D) \rightarrow C$

1994 (2n) $\vdash\ A$

valide

MA 15 $A \rightarrow [\overline{\overline{B} \vee C} \vee \overline{D}];\ \overline{A \rightarrow D} \wedge (\overline{A} \leftrightarrow D)$

1994 (2a) $\vdash\ \overline{E} \rightarrow (\overline{E} \rightarrow C)$

non-valide

MA 16 $(A \wedge B) \rightarrow C;\ (A \wedge C) \rightarrow B;\ A$

1995 (1) $\vdash\ C \leftrightarrow B$

valide

MA 17 $\overline{C \vee D} \rightarrow \overline{A \wedge B};\ D \rightarrow \overline{C};\ \overline{D \rightarrow E}$

1995 (2) $\vdash\ \overline{B}$

non-valide

MA 18 $\overline{A \wedge B} \rightarrow (\overline{C} \vee D);\ \overline{C} \rightarrow (C \wedge E)$

1996 (1) $\vdash\ B \vee D$

valide

MA 19 $\overline{A \wedge B} \vee (C \vee D);\ \overline{B \rightarrow (A \rightarrow C)}$

1996 (2) $\vdash\ \overline{E} \rightarrow D$

valide

MA 20 $(R \rightarrow S) \rightarrow (A \rightarrow B);\ \overline{R} \leftrightarrow C$

1997 (2) $\vdash\ C \rightarrow (A \rightarrow B)$

valide

MA 21 $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\overline{C} \vee D);\ A \rightarrow B$

1998 (1) $\vdash\ [\overline{C \rightarrow B} \vee (A \wedge C)] \rightarrow D$

valide

MA 22
1999 (1)
valide

$(\overline{A} \wedge \overline{B}) \rightarrow \overline{C \wedge D}; \; D \wedge \overline{\overline{C} \vee A}$

$\vdash \; \overline{B} \rightarrow E$

MA 23
2000 (1)
valide

$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C); \; C \leftrightarrow D; \; \overline{D} \vee E$

$\vdash \; A \rightarrow E$

MA 24
2001 (1)
valide

$\overline{P \rightarrow Q}; \; \overline{S \wedge \overline{P}} \rightarrow R; \; \overline{T \rightarrow U} \wedge (W \vee \overline{R})$

$\vdash \; \overline{(W \vee U) \rightarrow \overline{R}}$

MA 25
2001 (2)
valide

$(E \rightarrow B) \rightarrow \overline{C \leftrightarrow D}; \; (\overline{D} \vee \overline{E}) \rightarrow \overline{C \rightarrow \overline{D}}$

$\vdash \; F \rightarrow (\overline{E} \rightarrow \overline{\overline{D} \vee C})$

MA 26
2002 (1)
valide

$(K \rightarrow \overline{L}) \rightarrow (L \wedge M); \; (K \leftrightarrow L) \rightarrow \overline{R \rightarrow S}$

$\vdash \; S \rightarrow [(K \rightarrow L) \rightarrow M]$

MA 27
2002 (2)
valide

$D \wedge G; \; \overline{A} \rightarrow (B \wedge D); \; B \leftrightarrow (D \wedge A)$

$\vdash \; \overline{B} \rightarrow [(H \wedge F) \rightarrow C]$

MA 28
2003 (1)
valide

$\overline{M}$

$\vdash \; [(A \rightarrow B) \rightarrow M] \leftrightarrow (A \wedge \overline{B})$

MA 29
2003 (2)
valide

$H \leftrightarrow A; \; H \rightarrow \overline{M}; \; (A \vee C) \rightarrow \overline{S}$

$\vdash \; (S \rightarrow M) \rightarrow (S \rightarrow \overline{H})$

MA 30
2004 (1)
valide

$(A \vee B) \rightarrow [(C \vee E) \rightarrow (F \wedge D)]; \; (D \vee G) \rightarrow L$

$\vdash \; A \rightarrow (\overline{C} \vee L)$

MA 31
2004 (2)
valide

$(A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{B} \wedge E); \; (A \leftrightarrow B) \rightarrow (\overline{A} \rightarrow \overline{E}); \; \overline{A \wedge \overline{B}}$

$\vdash \; \overline{E}$

MA 32 $\overline{S} \rightarrow \overline{R}\,;\ \overline{R} \rightarrow (\overline{T} \wedge \overline{P})$

2005 (1) $\vdash\ (T \rightarrow Q) \vee S$

valide

MA 33 $\overline{A \vee E}\,;\ B \leftrightarrow A;\ \overline{B} \rightarrow C;\ \overline{C \vee D}$

2006 (1) $\vdash\ D \wedge B$

valide

MA 34 $(P \rightarrow Q) \rightarrow [\overline{R} \rightarrow \overline{\overline{S} \wedge \overline{T}}\,]$

2006 (2) $\vdash\ (R \rightarrow P) \rightarrow [\overline{T} \rightarrow (\overline{S} \rightarrow P)]$

valide

MA 35 $\overline{A} \rightarrow \overline{B}\,;\ B \vee (\overline{C} \wedge \overline{D})$

2007 (1) $\vdash\ (\overline{C} \vee E) \vee A$

valide

MA 36 $A;\ B;\ A \rightarrow D;\ \overline{B \wedge E}\,;\ (D \wedge \overline{E}\,) \rightarrow \overline{F}\,;\ \overline{F} \rightarrow G$

2007 (2) $\vdash\ G$

valide



2.4.2 Prédicats

2.4.2.1 PRINCIPE

Dans la logique des prédicats, nous trouvons dans les prémisses des affirmations faites au sujet d'un, de plusieurs ou de tous les individus. Vérifier la validité signifierait-il donc qu'il faut vérifier ces affirmations pour *tous* les individus par exemple? On voit que ce serait une tâche ardue. Mais en fait, le nombre d'individus concernés par un raisonnement donné est limité par le nombre d'existentielles dans le raisonnement. C'est sur cette considération que s'appuie la méthode des arbres appliquée à la logique des prédicats (PMA).

Considérons le raisonnement suivant (avec une existentielle):

Exemple 1
(1) Tous les chiens de prison portent malheur.
(2) Il y a un chien de prison.
|— Donc il y a un chien qui porte malheur.

A y réfléchir on remarque que l'extension inconnue (et peut-être grande) de (1) est réduite immédiatement par (2) qui limite le champ de vérification de la conclusion à **un seul** chien par rapport à (1).

Considérons ce raisonnement (avec 2 existentielles):

Exemple 2
(1) Tous les chiens de prison portent malheur.
(2) Il y a un chien de prison.
(3) Il y a un chien qui n'est pas un chien de prison
|— Il y a un chien de prison ou un chien qui n'est pas de prison qui portent malheur.

Ici l'on voit que pour apprécier la validité de la conclusion il faudra la «tester» par rapport aux **deux** affirmations existentielles sur des chiens de prison.

Le nombre d'existentielles dans le raisonnement délimite donc le champ d'application des universelles en le réduisant. Il sera donc essentiel de connaître de manière précise ce nombre d'existentielles, car il nous donnera l'extension du raisonnement à vérifier. Cette procédure s'appelle la **spécialisation**.

Les deux raisonnements sont assez obscurs et difficiles à saisir. C'est surtout l'expression répétée de «il y a un chien…» qui est assez déroutante, car on a l'impression de ne pas très bien saisir de qui on parle précisément.

Puisqu'il en est ainsi, donnons tout simplement un nom à chacun de ces chiens; nous allons **spécifier** de qui il s'agit!

Et comme l'on ne sait pas si dans les existentielles il s'agit toujours du même individu, on admettra par principe que chacune concerne un autre individu[86].

Cette spécification pourrait nous donner:

Exemple 1
(1) Tous les chiens de prison portent malheur.
(2) Rantanplan est un chien de prison.
|— Rantanplan porte malheur.

Exemple 2
(1) Tous les chiens de prison portent malheur.
(2) Rantanplan est un chien de prison.
(3) Milou n'est pas un chien de prison.
|— Donc Rantanplan ou Milou portent malheur.

Il est remarquable de constater qu'ainsi les expressions «*il y a …; il existe ….* etc.» ont disparu de notre formulation.

Pour tester la validité d'un raisonnement en logique des prédicats, nous allons en conséquence:

- prendre en considération le nombre d'existentielles dans le raisonnement,
- nous donner un modèle en désignant des individus individuels en remplacement des existentielles (= spécialisation).

2.4.2.2 RÈGLES ET PROCÉDURE

Pour tester la validité d'un raisonnement dans le calcul des prédicats, il faut introduire deux règles nouvelles:

1) spécialisation existentielle:
Si on a (∃x) Sx [s'il y a un individu x ayant la propriété S], alors on peut en déduire qu'il y a au moins une spécialisation possible (a <u>ou</u> b <u>ou</u> c <u>ou</u>...), mais on ne sait pas qui exactement est cet individu. On est donc autorisé a faire une et une seule spécialisation (puisque ce x existe!), mais on la fera par un individu **n'ayant pas encore été utilisé dans le contexte du raisonnement à vérifier**, et nous avons donc:

$(\exists x)\, Sx \quad \Rightarrow \quad Sa$ (a n'ayant pas encore été utilisé)

[86] … quoique dans cet exemple ceci semble assez évident!

Conséquence: Puisqu'au pire des cas il n'y a qu'un seul individu ayant la propriété S, on ne pourra utiliser **qu'une seule fois** la formule initiale.

2) spécialisation universelle:
Si on a (∀x) Rx [si tout individu x a la propriété R], alors on peut en déduire que tout individu quelconque a, b, c etc. a nécessairement la propriété R et nous avons donc:

(∀x) Rx ⇒ Ra <u>et</u> Rb <u>et</u> Rc etc.

Conséquence: La formule initiale avec quantificateur peut être réutilisée **autant de fois que nécessaire**.

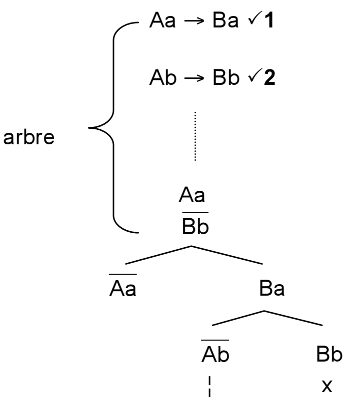
2.4.2.3 CONSEILS

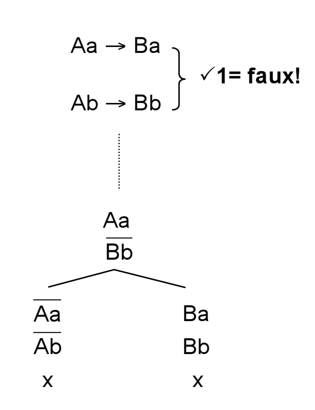
- Puisque les existentielles restreignent le nombre d'individus sur lesquels est vérifié le raisonnement, on procédera d'abord à la spécialisation des existentielles pour fixer un domaine d'interprétation.

  Ensuite seulement on spécialisera les universelles en utilisant les mêmes individus et en tenant compte dans le choix des constantes individuelles du fait qu'il faut aboutir à des contradictions.

- Chaque universelle ainsi spécifiée peut ainsi apparaître 2, 3 ou plus de fois dans un raisonnement. Il faudra les traiter comme autant de vérités différentes (arbre à gauche) et ne pas les ouvrir en une fois (c. arbre à droite)!


Preuve:





ici: une branche reste ouverte!
CORRECT

ici: les deux branches ferment!
FAUX

- Si dans un raisonnement il n'y a que des universelles, il suffira d'une spécialisation pour vérifier la validité. Les prémisses valant pour tous les individus, un seul contre-exemple (pour l'individu a) invaliderait le raisonnement.

- On remarquera que par la spécialisation les quantificateurs disparaissent. Dans nos exemples, il s'agissait toujours de quantificateurs non niés. Pour les quantificateurs niés on procédera (par les règles des quantificateurs) aux transformations suivantes avant de commencer la construction de l'arbre:



$\overline{(\forall x)[...]} \Rightarrow (\exists x)\,\overline{[...]}$ et $\overline{(\exists x)[...]} \Rightarrow (\forall x)\,\overline{[...]}$

  ceci afin de faire disparaître les négations des quantificateurs. Ceci est une étape nécessaire, car des expressions apparemment universelles se réduisent à des existentielles et inversement. Le nombre d'existentielles dans le raisonnement peut changer en conséquence!

- Attention: Aa n'est pas contradictoire avec $\overline{Ab}$. «*Olivier a les yeux bleus*» n'est pas en contradiction avec «*Larissa n'a pas les yeux bleus*».

- On peut aussi, bien entendu, fermer des expressions quantifiées contradictoires. Mais attention:
  - $(\forall x)\,Ax$ (tous) ferme avec $(\forall x)\,\overline{Ax}$ (aucun) et $\overline{(\forall x)Ax}$ (tous ne sont pas…)
  - $(\exists x)\,Ax$ (quelque) ferme avec $\overline{(\exists x)Ax}$ (aucun), **mais** n'est pas en contradiction avec $(\exists x)\,\overline{Ax}$ (quelqu'un n'est pas) comme le montre l'exemple ci-dessus!

2.4.2.4 EXERCICES COMMENTÉS

Pour vérifier les raisonnements dans le calcul des prédicats, nous allons mettre en place un «modus operandi» qui pourra paraître un peu lourd et répétitif, mais qui a comme avantage de constituer une démarche fiable.

Cette démarche comporte trois étapes: la *transformation*, la *modélisatio*n et la *vérification*.

La *transformation* consiste à transformer les prémisses jusqu'à pouvoir déterminer avec précision combien il y aura d'existentielles et dans quelle(s) branche(s). Ainsi les quantificateurs niés seront remplacés par d'autres non niés et les expressions à quantification multiple seront ouvertes selon les règles usuelles des arbres pour dégager les quantificateurs niés qui seront à leur tour transformés en quantificateurs non niés. Ensuite nous marquons par * toutes les lignes qui restent pour établir le modèle.

La *modélisation* consiste à remplacer les expressions quantifiées par des expressions contenant des constantes individuelles dont le nombre est donné par le nombre d'existentielles.

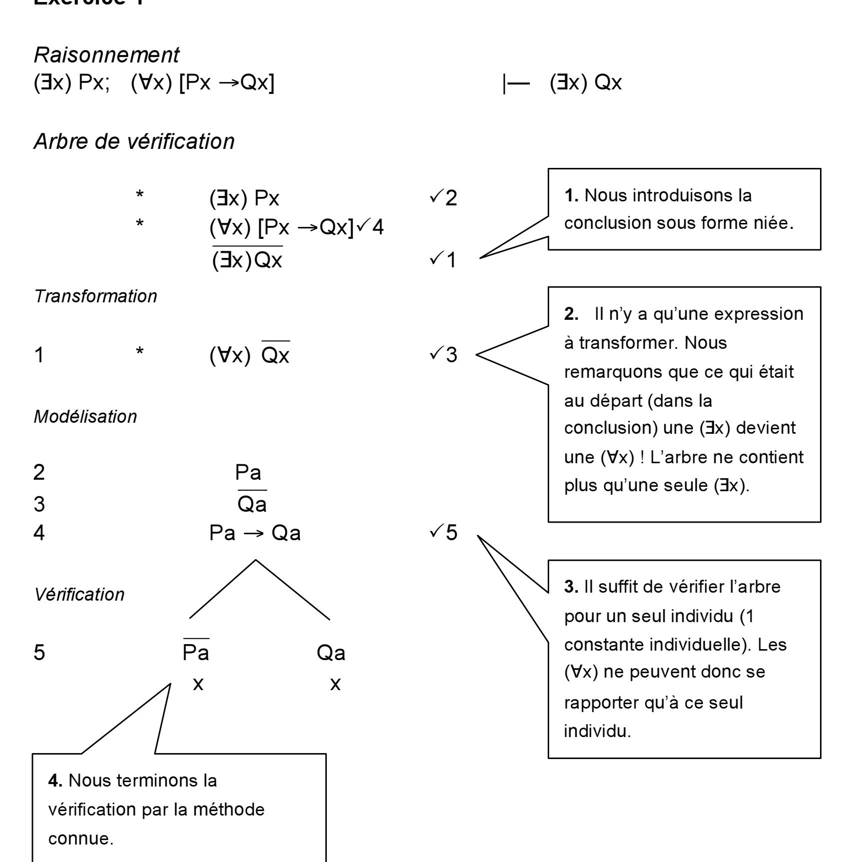
La *vérification* se fera par l'application des règles usuelles de vérification pour les arbres.

Exercice 1

Raisonnement

(∃x) Px; (∀x) [Px →Qx] |— (∃x) Qx

Arbre de vérification



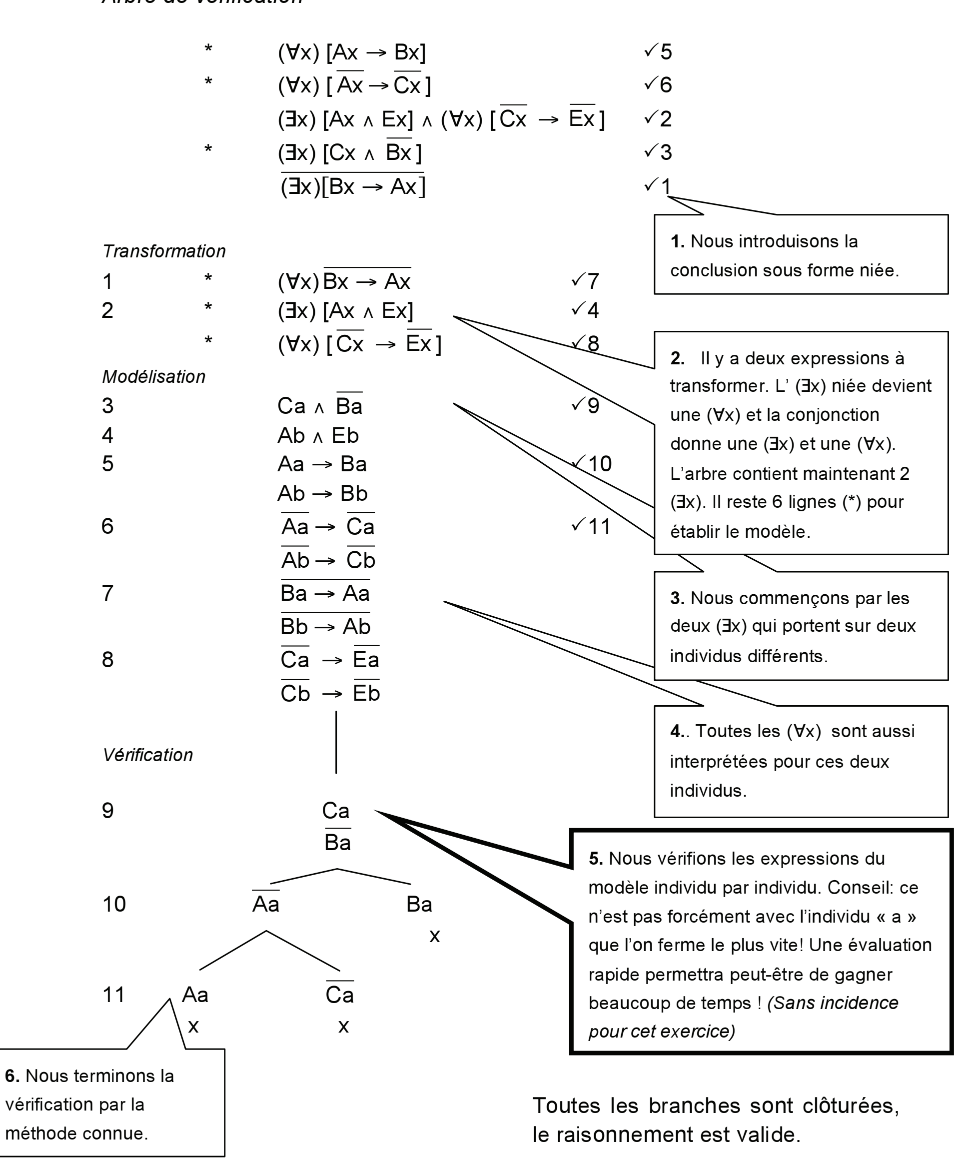
Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

Exercice 2

Raisonnement

$(\forall x)\,[Ax \rightarrow Bx]$; $(\forall x)\,[\overline{Ax} \rightarrow \overline{Cx}]$; $(\exists x)\,[Ax \wedge Ex] \wedge (\forall x)\,[\overline{Cx} \rightarrow \overline{Ex}]$;
$(\exists x)\,[Cx \wedge \overline{Bx}]$ $\quad\vdash\quad$ $(\exists x)\,[Bx \rightarrow Ax]$

Arbre de vérification



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

Exercice 3

Raisonnement


(∀x) Qx → (∃x) Lx; (∃x) Lx → Za |— (∀x) [Qx → Za]

Arbre de vérification

$(\forall x)\ Qx \rightarrow (\exists x)\ Lx$ ✓2
$(\exists x)\ Lx \rightarrow Za$ ✓4
$\overline{(\forall x)[Qx \rightarrow Za]}$ ✓1

Transformation					
1	* $(\exists x)\ \overline{Qx \rightarrow Za}$ ✓6				
2	* $\overline{(\forall x)Qx}$ ✓3		$(\exists x)\ Lx$ ✓7		
3	* $(\exists x)\overline{Qx}$ ✓8				
4	* $\overline{(\exists x)Lx}$ ✓5	Za	$\overline{(\exists x)Lx}$	Za	✓9
5	* $(\forall x)\overline{Lx}$		x		✓10
Modélisation					
6	$\overline{Qb \rightarrow Za}$	$\overline{Qb \rightarrow Za}$		$\overline{Qb \rightarrow Za}$	✓11
7 / 8	$\overline{Qc}$	$\overline{Qc}$		Lc	
9		Za		Za	
10	$\overline{La}$ $\overline{Lb}$ $\overline{Lc}$				
Vérification					
11	Qb $\overline{Za}$	Qb $\overline{Za}$ x		Qb $\overline{Za}$ x	

1. Nous introduisons la conclusion sous forme niée.

2. Le raisonnement contient déjà une constante individuelle « a ».

3. L'expression à deux quantificateurs est ouverte selon les règles normales.

4. Comme un individu est déjà spécifié, nous attribuons des constantes individuelles nouvelles aux (∃x) qui restent.

5. Nous terminons la vérification par la méthode connue.

Toutes les branches ne sont pas clôturées, le raisonnement **n'est pas** valide.

2.4.2.5 APPLICATIONS [PMA]

PMA 1 $(\forall x)\ [\overline{Ax} \vee Bx];\ \overline{(\exists x)Bx}\ ;\ (\forall x)\ [\overline{Ax \vee Bx} \rightarrow Cx]$

1988 (1) $\vdash (\forall x)\ [Ax \rightarrow Cx] \rightarrow (\forall x)\ [\overline{Cx} \rightarrow Bx]$

valide

PMA 2 $(\forall x)\ [Cx \rightarrow (Sx \vee Tx)];\ (\forall x)\ [Sx \rightarrow Nx];\ \overline{(\forall x)[Cx \rightarrow Nx]}$

1988 (2) $\vdash (\exists x)\ [Cx \wedge Tx]$

valide

PMA 3 $(\exists x)\ Lx;\ (\exists x)\ Kx \rightarrow (\forall x)\ Lx;\ (\forall x)\ Kx \vee (\exists x)\ Mx$

1989 (1) $\vdash (\forall x)\ Mx$

non-valide, ∃ multiples

PMA 4 $(\forall x)\ Qx \rightarrow (\exists x)\ Lx;\ (\exists x)\ Lx \rightarrow Za$

1989 (2) $\vdash (\forall x)\ [Qx \rightarrow Za]$

non-valide, ∃ multiples

PMA 5 $(\forall x)\ [Ax \rightarrow (Bx \vee Cx)];\ (\exists x)\ [Bx \wedge Dx];\ (\exists x)\ [Cx \wedge Ex];$

1990 (1) $(\forall x)\ \{[(Bx \wedge \overline{Dx}) \vee Ex] \rightarrow Fx\}$

$\vdash (\exists x)\ [Cx \wedge Fx]$

valide, ∃ multiples

PMA 6 $(\forall x)\ [(\overline{Rx} \rightarrow Qx) \rightarrow Sx]$

1990 (2) $\vdash (\forall x)\ \overline{Qx \wedge \overline{Sx}} \wedge (\forall x)\ [\overline{Rx} \vee Sx]$

valide

PMA 7 $(\forall x)\ [Ax \rightarrow Bx];\ (\forall x)\ [\overline{Ax} \rightarrow \overline{Cx}];\ (\exists x)\ [Cx \wedge \overline{Bx}]$

1991 (1) $(\exists x)\ [Ax \wedge Ex] \wedge (\forall x)\ [\overline{Cx} \rightarrow \overline{Ex}];$

$\vdash (\exists x)\ [Bx \rightarrow Ax]$

valide, ∃ multiples

PMA 8 $(\forall x)\ Ax \rightarrow (\forall x)\ [Bx \rightarrow Cx];\ \overline{(\exists x)Cx}$

1991 (2) $\vdash (\exists x)\ [Bx \rightarrow \overline{Ax}]$

valide

PMA 9 $(\forall x)\ [\overline{Kx} \rightarrow Lx] \wedge \overline{Ka}\ ;\ \overline{(\exists x)Lx \vee (\forall x)Mx}$

1992 (1) $\vdash \overline{(\exists x)Kx \rightarrow (\exists x)Mx}$

valide, ∃ multiples

PMA 10 $(\exists x)\,[Ax \vee Bx];\ (\forall x)\,[\overline{Fx} \rightarrow (\overline{Bx} \wedge Dx)];$
1992 (2) $(\exists x)\,Ax \rightarrow (\exists x)\,[Fx \wedge Cx]$
$\vdash (\exists x)\,[Ax \vee Fx]$
valide, ∃ multiples

PMA 11 $(\exists x)\,Ax \rightarrow (\exists x)\,[Bx \wedge Cx];\ (\exists x)\,Bx \rightarrow (\exists x)\,[Bx \wedge Ex]$
1993 (1) $\vdash (\exists x)\,Ax \rightarrow (\exists x)\,Ex$
valide, ∃ multiples

PMA 12 $\overline{(\exists x)[Ax \wedge \overline{Bx}]};\ (\forall x)\,Ax;\ (\forall x)\,[(Ax \wedge Bx) \rightarrow Cx]$
1993 (2) $\vdash (\forall x)\,[Ax \rightarrow Cx] \wedge (\forall x)\,[\overline{Cx} \rightarrow Bx]$
valide

PMA 13 $(\forall x)\,[Ax \rightarrow (Bx \vee Cx)];\ \overline{(\exists x)[Dx \wedge \overline{Ex}]}$
1994 (1a) $\vdash (\forall x)\,[Ex \rightarrow Bx] \rightarrow \overline{(\exists x)[Dx \wedge Ax]}$
non-valide

PMA 14 $(\forall x)\,[(Ax \vee Bx) \rightarrow Cx];\ \overline{(\exists x)[(Cx \vee Ex) \wedge \overline{Fx}]}$
1994 (2a) $\vdash (\forall x)\,[Ax \rightarrow Fx]$
valide

PMA 15 $(\forall x)\,[Ax \rightarrow (Dx \wedge Fx)];\ (\forall x)\,Ax \rightarrow \overline{(\exists x)Bx};\ (\exists x)\,[Ax \wedge Cx]$
1994 (1n) $\vdash (\exists x)\,Fx$
valide, ∃ multiples

PMA 16 $(\forall x)\,Ax \rightarrow (\exists x)\,[Bx \wedge Cx];\ (\exists x)\,[Bx \wedge Dx];\ Da$
1994 (2n) $\vdash (\exists x)\,[Ax \wedge Dc]$
non-valide, ∃ multiples

PMA 17 $(\forall x)\,[Ax \rightarrow (\overline{Bx} \rightarrow Cx)];\ (\exists x)\,[Ax \wedge Bx];\ (\exists x)\,[Ax \wedge \overline{Bx}]$
1995 (1) $\vdash (\exists x)\,[Ax \wedge Cx]$
valide, ∃ multiples

PMA 18 $\overline{(\exists x)Px} \rightarrow \overline{(\forall x)Qx};\ \overline{(\forall x)Px} \vee (\exists x)\,Rx;\ (\exists x)\,Qx$
1995 (2) $\vdash (\exists x)\,Rx$
non-valide, ∃ multiples

PMA 19 $(\forall x)\,[\overline{Ax} \vee (Bx \vee Cx)];\ (\exists x)\,[Ax \wedge Bx];\ \overline{(\forall x)[Ax \rightarrow Bx]}$
1996 (1) $\vdash (\exists x)\,[Ax \wedge Cx]$
valide, ∃ multiples

PMA 20
1996 (2)
valide

$$(\forall x)\,[(\overline{Ax} \rightarrow Bx) \rightarrow Cx]$$
$$\vdash\ (\forall x)\,[\overline{Ax} \vee Cx] \wedge (\forall x)\,[\overline{Bx} \vee Cx]$$

PMA 21
1997 (1.1)
valide, ∃ multiples

$$(\exists x)\,[Bx \wedge Cx];\ (\forall x)\,[(\overline{Ax} \vee \overline{Dx}) \rightarrow \overline{Bx}];\ (\forall x)\,\overline{Ax} \vee (\exists x)\,\overline{Bx}$$
$$\vdash\ (\exists x)\,Dx$$

PMA 22
1997 (1.2)
valide

$$(\forall x)\,[\overline{Lx} \vee Mx] \rightarrow (\forall x)\,[\overline{Mx} \vee Nx];\ (\forall x)\,\overline{Nx}$$
$$\vdash\ (\exists x)\,[Mx \rightarrow \overline{Lx}]$$

PMA 23
1997 (2)
valide, ∃ multiples

$$(\exists x)\,[Ax];\ (\exists x)\,[Ax] \rightarrow \overline{(\exists x)Bx};\ (\forall x)\,[\overline{Bx} \rightarrow (Cx \rightarrow Dx)]$$
$$\vdash\ (\forall x)\,[Cx \rightarrow Dx]$$

PMA 24
1998 (1)
valide, ∃ multiples

$$(\forall x)\,\overline{[Dx \leftrightarrow Bx]};\ (\exists x)\,\overline{Bx} \wedge \overline{(\forall x)[Cx \rightarrow Dx]};$$
$$(\forall x)\,[\overline{\overline{Bx} \wedge \overline{Dx}} \rightarrow \overline{Cx}]$$
$$\vdash\ \overline{(\forall x)[Dx \rightarrow Cx]}$$

PMA 25
1998 (2)
valide

$$(\exists x)\,[Ax \wedge \overline{Bx}];\ (\forall x)\,[Ax \rightarrow (Cx \rightarrow Bx)];$$
$$(\forall x)\,\{Ax \rightarrow [(\overline{Dx} \vee \overline{Ex}) \rightarrow Cx]\}$$
$$\vdash\ (\exists x)\,[Ax \wedge Dx]$$

PMA 26
1999 (1)
non-valide, ∃ multiples

$$(\forall x)\,[Ax \rightarrow Bx] \vee \overline{(\forall x)Cx};\ \overline{(\exists x)Bx}$$
$$\vdash\ (\forall x)\,[Ax \rightarrow \overline{Cx}]$$

PMA 27
1999 (2)
valide

$$(\forall x)\,[\overline{Ax} \vee (Cx \rightarrow Bx)];\ (\exists x)\,[Ax \wedge \overline{Bx}];$$
$$(\forall x)\,[Ax \rightarrow (Dx \vee Cx)]$$
$$\vdash\ (\exists x)\,[Ax \wedge Dx]$$

PMA 28
2000 (1)
valide

$$(\forall x)\,[Ax \rightarrow Bx] \rightarrow (\forall x)\,[Bx \rightarrow Cx];\ \overline{(\exists x)Cx}$$
$$\vdash\ (\exists x)\,\overline{[Bx \wedge Ax]}$$

PMA 29
2000 (2)
valide, ∃ multiples

$$(\forall x)\,[Ax \rightarrow \overline{Cx}] \wedge (\exists x)\,[Cx \wedge Dx];\ (\forall x)\,[Dx \leftrightarrow Ax];\ (\exists x)\,Ax$$
$$\vdash\ (\exists x)\,\overline{Cx} \vee (\exists x)\,\overline{Dx}$$

PMA 30 $(\exists x)\ [\overline{Ax \rightarrow Dx}];\ (\forall x)\ [(Ax \wedge Bx) \rightarrow Cx];$

2001 (1) $(\forall x)\ [\overline{Bx} \rightarrow \overline{\overline{Cx} \wedge \overline{Ex}}];\ (\exists x)\ [\overline{Cx} \wedge \overline{Ex}];\ (\forall x)\ [\overline{Bx} \wedge Fx]$

$\vdash\ (\exists x)\ [Ex \vee Dx]$

valide, ∃ multiples

PMA 31 $(\exists x)\ [Ax \vee Bx] \rightarrow (\forall x)\ \overline{Cx};\ (\exists x)\ [Dx \wedge Ax];\ (\exists x)\ \overline{Ex};\ Da$

2001 (2) $\vdash\ Ca \rightarrow Ea$

valide, ∃ multiples

PMA 32 $(\exists x)\ [Ax \leftrightarrow Bx];$

2002 (1) $\vdash\ [(\forall x)\ Ax \rightarrow (\exists x)\ Bx] \wedge [(\exists x)\ Bx \rightarrow (\exists x)\ Ax]$

non-valide, ∃ multiples

PMA 33 $(\forall x)\ [(Bx \wedge Dx) \rightarrow Ax];\ (\exists x)\ [Bx \wedge \overline{Ax}];$

2002 (2) $(\forall x)\ \{Bx \rightarrow [\overline{Dx} \rightarrow \overline{\overline{Cx} \vee \overline{Fx}}]\}$

$\vdash\ (\exists x)\ [Cx \wedge Bx]$

valide

PMA 34 $(\exists x)\ [Rx \rightarrow (Px \wedge \overline{Qx})];\ (\forall x)\ [(Sx \wedge Rx) \rightarrow Qx];$

2003 (1) $\overline{(\exists x)[\overline{Rx} \wedge \overline{Qx} \wedge Sx]}$

$\vdash\ (\forall x)\ [(Px \wedge Sx) \rightarrow Qx]$

valide, ∃ multiples

PMA 35 $(\forall x)\ [\overline{Fx} \rightarrow \overline{Gx}];\ \overline{(\forall x)[Gx \rightarrow Nx]};\ (\forall x)\ [(Hx \wedge Nx) \leftrightarrow Fx];$

2003 (2) $(\forall x)\ [Nx \rightarrow (Fx \vee Gx)]$

$\vdash\ (\exists x)\ [Hx \wedge Gx]$

valide

PMA 36 $(\forall x)\ [Ax \leftrightarrow Bx];\ (\forall x)\ [(Cx \wedge Dx) \rightarrow Bx];\ (\exists x)\ [Ax \wedge Dx]$

2004 (1) $\vdash\ (\exists x)\ [Bx \wedge Dx]$

valide

PMA 37 $(\forall x)\ [\overline{Ax \leftrightarrow Cx}];\ (\exists x)\ [\overline{Ex \rightarrow Ax}] \wedge (\exists x)\overline{Cx};$

2004 (2) $(\forall x)\ [Ex \rightarrow (\overline{Cx} \wedge \overline{Ax})]$

$\vdash\ (\exists x)\ [\overline{Ax \rightarrow Ex}]$

valide, ∃ multiples

PMA 38 $(\exists x)\ [\overline{Cx} \wedge Ax];\ \overline{(\forall x)[Ax \rightarrow \overline{Cx}]};\ (\forall x)\ [(Ax \wedge \overline{Cx}) \rightarrow Bx]$

2005 (1) $\vdash\ \overline{(\forall x)[Ax \rightarrow \overline{Bx}]}$

valide, ∃ multiples

PMA 39

2005 (2)

$(\forall x)\,[\overline{Cx} \rightarrow Bx];\ (\exists x)\,[Ax \rightarrow Bx];$

$(\forall x)\,[\overline{Ax \rightarrow Bx} \vee (Ax \rightarrow Cx)]$

$\vdash\ (\exists x)\,[\overline{Cx} \rightarrow \overline{Ax}]$

valide

PMA 40

2006 (2)

$\overline{(\exists x)\,\overline{Ax}};\ (\exists x)Ax \rightarrow \overline{(\exists x)Bx};\ (\forall x)\,[\overline{Bx} \rightarrow (\overline{Dx} \rightarrow \overline{Cx})]$

$\vdash\ (\forall x)\,[\overline{Cx} \vee Dx]$

valide

PMA 41

2007 (1)

$(\forall x)\,[\overline{\overline{Ax} \wedge \overline{Bx}} \rightarrow \overline{Cx}];\ (\exists x)\ \overline{Ax} \wedge \overline{(\forall x)[Cx \rightarrow Bx]}$

$(\forall x)\,[\overline{Bx \leftrightarrow Ax}]$

$\vdash\ \overline{(\forall x)[Bx \rightarrow Cx]}$

valide, ∃ multiples

PMA 42

2007 (2)

$\overline{(\forall x)Px} \vee (\exists x)\,[\overline{Qx} \wedge Rx];\ (\exists x)\,\overline{\overline{Qx} \vee \overline{Sx}};$

$(\forall x)\,[Rx \rightarrow (Rx \wedge Qx)];\ Sa$

$\vdash\ (\exists x)\ \overline{Px}$

valide, ∃ multiples,



2.5 DEDUCTIONS

Faire une déduction consiste à montrer le chemin qui mène des prémisses à la conclusion d'un raisonnement. Il ne s'agit donc pas de trouver la conclusion, mais de montrer qu'on peut effectivement déduire la conclusion indiquée des prémisses données en utilisant certaines règles de déduction et lois logiques données.

Ces règles de déduction et lois logiques sont propres au système établi et dépendent des définitions des connecteurs[87].

Les **règles de déduction (RD)** sont des schémas de raisonnement qui ont pour effet de décomposer une formule complexe en une ou des parties plus simples, respectivement de construire une formule plus complexe à partir de formules plus simples.

Les **lois logiques (LL)** servent à transformer des propositions données en d'autres propositions plus facilement décomposables ou recomposables à l'aide des règles de déduction. Les lois logiques ne font donc pas avancer la déduction proprement dite, mais elles permettent de remplacer des formules par d'autres qui leur sont équivalentes, car plus utiles pour le progrès de la déduction.

Les abréviations données tant pour les règles de déduction que pour les lois logiques ne sont données qu'à titre indicatif et ne sont nullement obligatoires. Toute autre manière d'indiquer la règle ou la loi appliquée est bien entendu acceptée, du moment qu'elle est clairement compréhensible.

Nous allons distinguer trois sortes de déduction: la preuve formelle simple, la preuve conditionnelle et la réduction à l'absurde. Ces trois sortes sont en fait trois approches différentes, la première utilisant les règles et lois de manière directe, les deux dernières utilisant les mêmes règles et lois avec une stratégie particulière.

[87] cf. les tableaux synoptiques des différents connecteurs.

2.5.1 Preuve formelle simple

2.5.1.1 PRINCIPE

La preuve formelle simple (PS) consiste à transformer, décomposer et recomposer les prémisses de manière à aboutir à la conclusion donnée.

La vérité des prémisses étant admise d'office (voir 1.1.2.1), chaque utilisation d'une LL ou d'une RD produira une nouvelle expression elle-même vraie.

2.5.1.2 CONSEILS

Pour faire une déduction par preuve formelle, on ne peut pas donner une démarche à suivre définitive et univoque. Une procédure comme pour la vérification par la méthode des arbres n'existe pas.

Afin d'éviter l'utilisation arbitraire de LL et RD et de suivre une démarche compréhensible, on pourra suivre les recommandations suivantes:

- indiquer pour chaque ligne quelle procédure (LL ou RD) a été utilisée et sur quelle(s) ligne(s);

- se donner une stratégie en:
  - identifiant dans les prémisses la localisation des éléments qui constituent la conclusion,
  - déterminant ce qu'il faut **éliminer** pour arriver à ces éléments (exercice commenté type P1),
  - se demandant quelle RD et/ou LL pourrait être utilisée pour cela,
  - imaginant comment il faut éventuellement **recomposer** les éléments pour arriver à la conclusion (exercice commenté type P2),
  - sachant que **fusionner** deux lignes est souvent un moyen pour déduire une conclusion sous forme d'une proposition présente dans deux prémisses différentes (exercice commenté type P3);

- utiliser à bon escient les RD, considérant que:
  - les RD ne s'appliquent que sur des lignes entières, jamais sur des parties d'expressions[88],
  - les LL peuvent être appliquées sur des parties d'expressions,
  - certaines règles peuvent servir à simplifier des expressions complexes, respectivement à «isoler» un élément d'une telle expression comme:
    - la simplification
    - le syllogisme disjonctif

---

[88] Les RD reposent sur le certitude que chaque ligne utilisée est vraie. Or, à l'intérieur d'une expression on ne connaît pas la valeur de vérité des différents termes. Donc, on ne peut appliquer les RD. Dans certains cas on pourrait le faire, mais pour plus de sûreté on ne le fera pas.

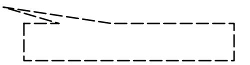
        - le modus ponens
        - le modus tollens,
    - d'autres règles permettent d'adjoindre des éléments en expressions plus complexes comme:
        - la conjonction
        - l'addition,
    - d'autres règles encore permettent de fusionner deux expressions différentes ayant toutefois un lien comme:
        - le syllogisme hypothétique;

- modifier les expressions «non productives» respectivement «productives»:
    - aucune RD ne s'applique sur une formule **niée en entier**; il faut donc transformer celle-ci en expression affirmative,
    - on a le plus souvent intérêt à réduire une conjonction par Simp en deux expressions.

2.5.1.3 EXERCICES COMMENTÉS

Les considérations *stratégiques* sont indiquées par

Les considérations *techniques* sont indiquées par



Exercice 1 (type P1)

Raisonnement

(1) $\overline{A} \rightarrow B$
(2) $A \rightarrow \overline{C}$
(3) $C \vee D$
(4) $\overline{D}$ $\vdash B$

Stratégie

1. La conclusion provient de (1). Il faut donc la « sortir » de là.

2. Il faut donc éliminer $\overline{A}$ qui est l'antécédent d'une implication. Il n'y a que le *modus ponens* qui le permette. Pour ce faire, il faudrait avoir $\overline{A}$.

(1) $\overline{A} \rightarrow B$

3. $\overline{A}$ ne peut provenir que de (2) à la suite d'un modus tollens.

(2) $A \rightarrow \overline{C}$

4. Pour ce faire, il faudrait avoir la négation du conséquent $\overline{C}$, donc C.

5. C est un terme de (3) qui est une disjonction. Il peut être isolé en éliminant D de la disjonction.

(3) $C \vee D$

6. Nous avons une RD qui permet de le faire, le *syllogisme disjonctif*. Pour cela il faut avoir la négation du terme D à enlever de la disjonction.

(4) $\overline{D}$

7. Cette négation est donnée par (4).

(n) B

Nous avons construit la déduction à rebours. Il n'y a plus qu'à prendre le sens inverse de nos réflexions.

Déduction

(1) $\overline{A} \rightarrow B$
(2) $A \rightarrow \overline{C}$
(3) $C \vee D$
(4) $\overline{D}$ $\vdash B$
(5) C SD 3; 4
(6) $\overline{A}$ MT 2; 5
(7) B MP 1; 6

Commentaires

Cet exercice est facile, car il ne demande que l'application de RD. On tire quasiment le bon bout de la ficelle et on suit le fil. Le raisonnement se déroule tout seul.

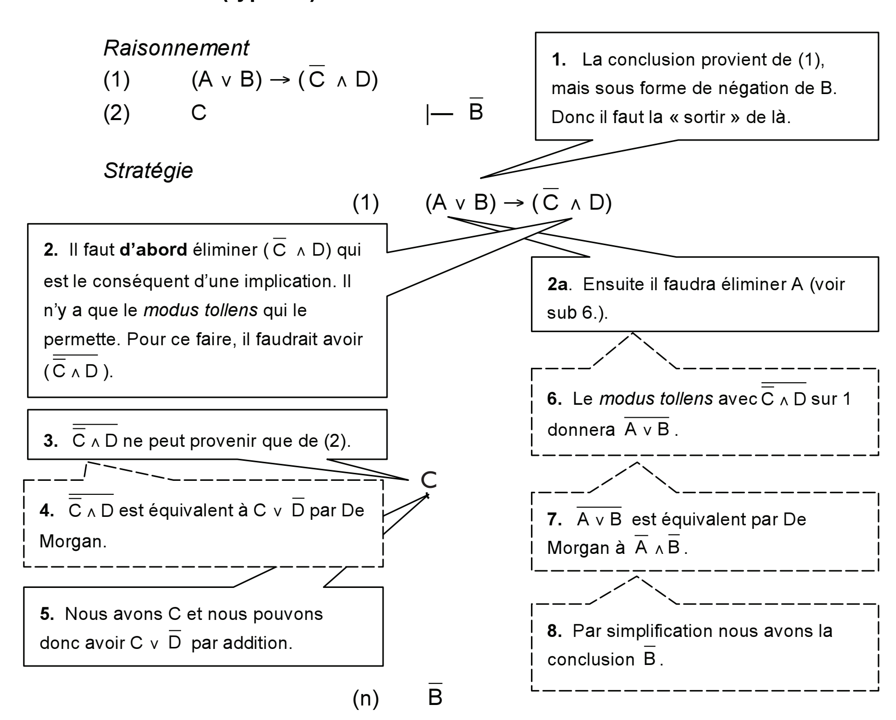
Exercice 2 (type P1)

Raisonnement

(1) (A ∨ B) → ($\overline{C}$ ∧ D)

(2) C ⊢ $\overline{B}$

Stratégie



Là encore, nous avons construit la déduction à rebours et nous avons trouvé deux démarches à faire successivement: enlever $\overline{C}$ ∧ D; trouver $\overline{B}$ à partir de A ∨ B. Maintenant nous pouvons faire la déduction en suivant cette démarche.

Déduction

(1)	(A ∨ B) → ($\overline{C}$ ∧ D)	
(2)	C	⊢ $\overline{B}$
(3)	C ∨ $\overline{D}$	Add 2
(4)	$\overline{\overline{C} \wedge D}$	DM 3
(5)	$\overline{A \vee B}$	MT 1; 4
(6)	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	DM 5
(7)	$\overline{B}$	Simp 6

Commentaires

L'addition est un moyen fort pour créer des «instruments» pour «ouvrir» des expressions [voir (3)]. Les LL (ici DM) permettent «d'arranger» les expressions pour se donner des expressions plus utiles.

Exercice 3 (type P2):

Raisonnement

(1) $(\overline{B} \wedge \overline{K}) \rightarrow (A \wedge \overline{T})$

(2) $\overline{A} \wedge \overline{B}$ $\vdash K \vee R$

Stratégie

1. La conclusion contient un terme R qui ne provient ni de (1), ni de (2). Il faut donc ajouter R par addition après avoir déduit K.

(1) $(\overline{B} \wedge \overline{K}) \rightarrow (A \wedge \overline{T})$

(2) $\overline{A} \wedge \overline{B}$

2. Il faut sortir K de (1) en éliminant $A \wedge \overline{T}$ respectivement $\overline{B}$.

3. (1) semble ne pas pouvoir être reformulée par une LL (p.ex. distribution), car elle ne contient que des termes différents. [mais voir aussi exercice 6 !].

4. Il faut donc « créer » $\overline{A \wedge \overline{T}}$ pour opérer un MT sur (1).

5. A nous est donné (sous forme de négation) par (2). T ne faisant pas partie des prémisses, doit donc être ajouté par Add. Ensuite DM.

(n) $K \vee R$

Nous avons construit la déduction à rebours. Il n'y a plus qu'à prendre le sens inverse de nos réflexions. On commencera par ce qui est le plus évident: la simplification de (2) qui donnera les deux «leviers» nécessaires pour «ouvrir» d'autres expressions.

Déduction

(1)	$(\overline{B} \wedge \overline{K}) \rightarrow (A \wedge \overline{T})$	
(2)	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	$\vdash K \vee R$
(3)	$\overline{A}$	Simp 2
(4)	$\overline{B}$	Simp 2
(5)	$\overline{A} \vee T$	Add 3
(6)	$\overline{A \wedge \overline{\overline{T}}}$	DM 5
(7)	$\overline{\overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{K}}}$	MT 1; 6
(8)	$B \vee K$	DM 7
(9)	K	SD 4; 8
(10)	$K \vee R$	Add 9

Commentaires

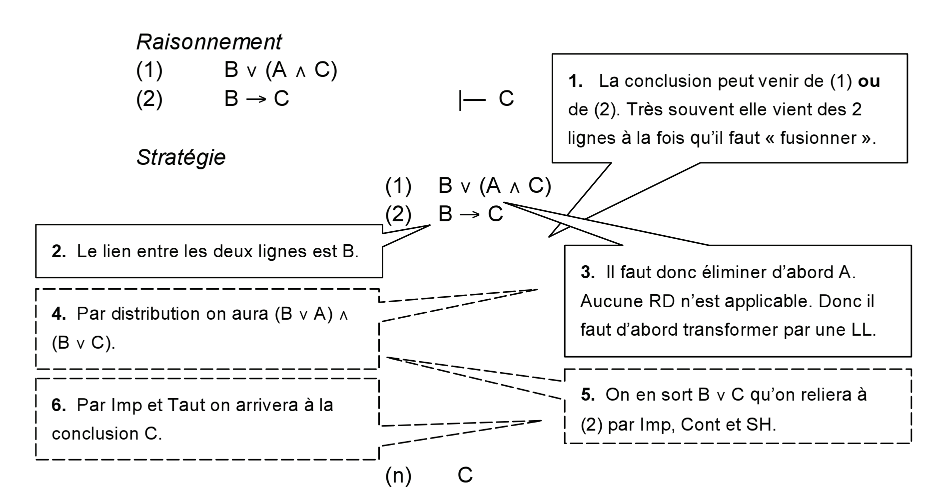
La double addition est la démarche nécessaire pour aboutir. A première vue, on a l'impression qu'il s'agit d'un «truc». Mais il n'y a rien d'illogique à admettre que si p est vrai, «p ou q» l'est aussi. La condition minimale pour que la disjonction soit vraie est remplie: au moins un terme (p en l'occurrence) est vrai! Par contre, il est certain que **jamais** on ne pourra alors déduire ce «q»! Si nous arrivons à déduire ce que nous avons «additionné», c'est que nous avons commis une faute quelque part!

Exercice 4 (type P3)

Raisonnement

(1)	$B \vee (A \wedge C)$	
(2)	$B \rightarrow C$	$\vdash C$

Stratégie



La démarche est <u>stratégique</u> de 1 à 3.
Les opérations sub 5 et 6 relèvent d'une <u>technique</u> assez fréquente: relier deux expressions par SH afin de ne garder qu'une expression de type $\overline{p} \rightarrow p$ qu'on réduira par Taut à p (qui est l'expression cherchée).

Déduction

(1)	$B \vee (A \wedge C)$	
(2)	$B \rightarrow C$	$\vdash C$
(3)	$(B \vee A) \wedge (B \vee C)$	Dis 1
(4)	$B \vee C$	Simp 3
(5)	$\overline{B} \rightarrow C$	Imp 4
(6)	$\overline{C} \rightarrow B$	Cont 5
(7)	$\overline{C} \rightarrow C$	SH 2; 6
(8)	$C \vee C$	Imp 7
(9)	C	Taut 8

Commentaires

On voit que dans ce raisonnement la démarche repose essentiellement sur l'application de LL (5!) servant à traiter le matériau pour qu'on puisse efficacement appliquer les RD (2!) [89]. La ligne (3) permet de transformer une disjonction en une conjonction qui, elle, peut être simplifiée! Rappelons-nous qu'une déduction est aussi toujours «une destruction» d'expressions existantes pour les «recoller» [lignes (6) et (7)] dans un autre ordre.

[89] … reste à savoir si les êtres humains raisonnent effectivement de cette manière… ?

Exercice 5 (type P3 et P1)

Raisonnement

(1) $(P \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q})$
(2) $R \rightarrow \overline{R}$
(3) $P \vee R$ $\qquad \vdash Q$

Stratégie

(1) $(P \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q})$
(3) $P \vee R$
(2) $R \rightarrow \overline{R}$
(n) Q

1. La conclusion provient de (1). Il faut donc la « sortir » de là.

2. Il faut **d'abord** « fusionner » les deux termes de la disjonction.

3. Ensuite il faut éliminer P.

4. P ne peut provenir que de (3).

5. On peut isoler P en éliminant R. Comme c'est une disjonction, il faudrait avoir $\overline{R}$.

6. $\overline{R}$ doit venir de (2) qui a la particularité d'être une implication entre deux termes contraires.

Nous avons construit la déduction à rebours. Même si les détails de la démarche restent à clarifier en cours de déduction, il n'y a plus qu'à prendre le sens inverse de nos réflexions.

Déduction

(1)	$(P \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q})$	
(2)	$R \rightarrow \overline{R}$	
(3)	$P \vee R$	$\vdash Q$
(4)	$\overline{R} \vee \overline{R}$	Imp 2
(5)	$\overline{R}$	Taut 4
(6)	P	SD 3; 5
(7)	$P \leftrightarrow Q$	Equiv 1
(8)	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	Equiv 7
(9)	$P \rightarrow Q$	Simp 8
(10)	Q	MP 6; 9

Commentaires

Une expression telle que la ligne (2), où le même terme se trouve avec deux valeurs contraires comme antécédent et conséquent d'une même implication, doit faire sonner les alarmes: elle est réductible au conséquent [lignes (4) et (5)].

Le «truc», à vrai dire pas évident à première vue, est l'application successive des deux LL de l'équivalence, permettant ainsi de passer d'une disjonction (1) à une conjonction (8).

Exercice 6 (type P3)

Raisonnement

(1) $(A \vee B) \rightarrow (C \rightarrow D)$

(2) $(\overline{D} \vee \overline{E}) \rightarrow (A \wedge C)$ $\quad \vdash D$

Stratégie

1. La conclusion provient probablement de la fusion de (1) et (2).

2. Il faut donc éliminer A, B, C et $\overline{E}$

(1) $(A \vee B) \rightarrow (C \rightarrow D)$

(2) $(\overline{D} \vee \overline{E}) \rightarrow (A \wedge C)$

3. À première vue aucune LL ne semble pouvoir s'appliquer ni à (1) ni à (2) !

4. (1) « cache » la structure suivante:
$(A \vee B) \rightarrow \underbrace{(C \rightarrow D)}_{r}$
$(p \vee q) \rightarrow r$
qui peut être distribuée.

5. Après cette distribution et Simp, B aura été enlevé. A sera éliminé par exportation et « fusion » avec (2).

6. La même opération que sub 4 permettra d'obtenir une expression tautologique qui sera réduite à D.

(n) D

Cet exercice est très difficile, car la démarche à faire n'est pas visible de prime abord. Mais il révèle une **exigence capitale** pour pouvoir faire les déductions:

Il faut regarder et déceler, au-delà des détails, les grandes structures des formules.

Ceci demande de l'expérience et on acquiert l'expérience en s'exerçant!

Déduction

(1)	$(A \vee B) \rightarrow (C \rightarrow D)$	
(2)	$(\overline{D} \vee \overline{E}) \rightarrow (A \wedge C)$	$\vdash$ D
(3)	$[A \rightarrow (C \rightarrow D)] \wedge [B \rightarrow (C \rightarrow D)]$	Dis 1
(4)	$A \rightarrow (C \rightarrow D)$	Simp 3
(5)	$(A \wedge C) \rightarrow D$	Exp 4
(6)	$(\overline{D} \vee \overline{E}) \rightarrow D$	SH 2; 5
(7)	$(\overline{D} \rightarrow D) \wedge (\overline{E} \rightarrow D)$	Dis 6
(8)	$\overline{D} \rightarrow D$	Simp 7
(9)	$D \vee D$	Imp 8
(10)	D	Taut 9

Commentaires

L'usage de cette LL de la distributivité assez complexe permet de transformer une structure ayant comme connecteur central une implication, en une conjonction [sans avoir une négation de l'ensemble comme pour Ne Imp]. Il faut noter ici l'usage de la LL de l'exportation, moyen très fort pour «réorganiser» une conditionnelle double [ou inversement une implication avec une conjonction comme antécédent] .

2.5.1.4 EXERCICES D'INITIATION FACILES

PS a	$E \to F;\ \overline{E} \to D;\ D \to R$	$\vdash$	$F \vee R$
PS b	$(\overline{A} \wedge \overline{B}) \to C;\ B \to (A \vee D);\ \overline{A} \wedge \overline{C}$	$\vdash$	D
PS c	$\overline{P} \vee \overline{Q};\ \overline{P} \to \overline{R};\ S \to R$	$\vdash$	$Q \to \overline{S}$
PS d	$P \to (Q \to R);\ \overline{Q} \to S;\ \overline{R} \wedge \overline{S}$	$\vdash$	$\overline{P}$
PS e	$H \to E;\ E \to (D \vee P);\ \overline{P}$	$\vdash$	$D \vee \overline{H}$
PS f	$(B \to A) \wedge (D \to C);\ (A \vee C) \to E;\ \overline{E}$	$\vdash$	$\overline{B \vee D}$

2.5.1.5 APPLICATIONS [PS]

PS 1 $\overline{P \wedge Q} \vee (R \wedge S);\ \overline{(R \to \overline{S}) \to \overline{Q}}$

1988 (1) $\vdash\ \overline{P}$

PS 2 $A \to \overline{B \vee \overline{C}};\ \overline{A} \to (A \wedge D);\ \overline{B} \to (C \to E)$

1988 (2) $\vdash\ \overline{F} \to E$

PS 3 $\overline{P} \wedge Q;\ (\overline{Q} \to R) \to T;\ (T \to P) \vee \overline{U};\ R \to (U \wedge V)$

1989 (1) $\vdash\ \overline{R}$

PS 4 $P;\ Q;\ [(P \vee R) \wedge (Q \vee S)] \to [(P \wedge Q) \to (Q \to S)];$

1990 (1) $(S \vee R) \to T$

$\vdash\ T \vee R$

PS 5 $A \leftrightarrow (B \to C);\ (B \wedge D) \vee \overline{B \vee D};\ [(\overline{D \to C}) \wedge D] \to C$

1990 (2) $\vdash\ A$

PS 6 $A \to B;\ B \to [A \to (C \vee D)];\ C \leftrightarrow D;\ \overline{C \wedge D}$

1991 (1) $\vdash\ \overline{A}$

PS 7 $(\overline{P} \vee Q) \wedge U;\ Q \to (R \wedge S);\ U \to \overline{\overline{S} \to T}$

1991 (2) $\vdash\ \overline{P \wedge R}$

PS 8 $A \to B;\ C \vee \overline{E};\ \overline{E} \to \overline{B \vee D}$

1992 (1) $\vdash\ \overline{A \wedge \overline{C}}$

PS 9 $P \to R;\ \overline{Q} \to S;\ (S \wedge R) \to T;\ \overline{T}$

1992 (2) $\vdash\ \overline{P} \vee Q$

PS 10 $\overline{B} \to \overline{A};\ (C \wedge D) \leftrightarrow A;\ \overline{A} \vee \overline{B}$

1993 (1) $\vdash\ F \to (C \to \overline{D})$

PS 11 $A \vee (B \wedge \overline{C});\ D \wedge C$

1993 (2) $\vdash\ E \to A$

PS 12 $\overline{A} \to B;\ C \to D;\ (C \vee \overline{A}) \vee F;\ F \to D;\ \overline{D}$

1994 (1a) $\vdash\ B$

PS 13 $A \to (B \wedge C);\ \overline{D} \vee (A \wedge E);\ C \to (B \to \overline{E})$

1994 (1n) $\vdash\ \overline{D}$

PS 14 $A \leftrightarrow B;\ C \to (A \wedge \overline{B});\ (P \to \overline{Q}) \to \overline{D \to (E \to \overline{C})}$
1994 (2a) $\vdash\ P \wedge Q$

PS 15 $\overline{\overline{D} \vee \overline{C}} \to (\overline{A} \to B);\ \overline{C \to A} \wedge D$
1994 (2n) $\vdash\ B \vee E$

PS 16 $A \leftrightarrow B;\ B \to (C \wedge D);\ (D \vee E) \to F;\ \overline{F}$
1995 (1) $\vdash\ \overline{A \wedge C}$

PS 17 $P \leftrightarrow Q;\ R \to (P \wedge \overline{Q});\ (U \to \overline{V}) \to \overline{S \vee (T \to \overline{R})}$
1995 (2) $\vdash\ U \wedge V$

PS 18 $\overline{A \wedge B} \to (C \to \overline{D});\ \overline{D \to A} \vee \overline{B \vee \overline{D}}$
1996 (1) $\vdash\ C \to E$

PS 19 $(A \to B) \wedge C;\ B \to (D \to E);\ (\overline{C} \vee \overline{E}) \wedge (\overline{C} \vee \overline{F})$
1996 (2) $\vdash\ \overline{A} \vee \overline{D}$

PS 20 $P \to Q;\ R \to S;\ T \to (P \vee R)$
1997 (2) $\vdash\ T \to (Q \vee S)$

PS 21 $A \leftrightarrow (C \wedge B);\ C \wedge F;\ \overline{B} \to (A \wedge C)$
1998 (1) $\vdash\ \overline{A} \to [(E \wedge G) \to D]$

PS 22 $\overline{P \leftrightarrow Q} \vee R;\ \overline{P};\ \overline{\overline{P} \wedge Q}$
1998 (2) $\vdash\ R$

PS 23 $(A \to B) \wedge C;\ (D \to E) \vee \overline{B};\ C \to \overline{E \vee F}$
1999 (1) $\vdash\ A \to \overline{D}$

PS 24 $P \vee \overline{Q};\ R \leftrightarrow Q;\ \overline{S \wedge \overline{R}};\ \overline{T} \vee S$
1999 (2) $\vdash\ \overline{P} \to \overline{T}$

PS 25 $A \leftrightarrow B;\ A \to (C \wedge D);\ (\overline{D} \to E) \to F;\ \overline{F}$
2000 (1) $\vdash\ B \to \overline{C}$

PS 26 $(A \to B) \to (\overline{C} \vee D);\ E \leftrightarrow \overline{A}$
2000 (2) $\vdash\ E \to (\overline{D} \to \overline{C})$

PS 27
2001 (1)

$\overline{\overline{A} \to C}\,;\ \overline{O} \to (B \wedge A);\ \overline{(D \to R) \vee \overline{E \vee \overline{O}}}$

$\vdash\ (E \vee R) \wedge O$

PS 28
2001 (2)

$(\overline{A} \to C) \to B;\ \overline{D} \vee (B \to E);\ \overline{\overline{A} \vee E}\,;\ C \to (D \wedge F)$

$\vdash\ \overline{C}$

PS 29
2002 (2)

$A \to B;\ B \leftrightarrow \overline{A}\,;\ B \to [(D \to E) \to A]$

$\vdash\ D \wedge \overline{E}$

PS 30
2003 (1)

$\overline{(A \to \overline{A}) \to \overline{C}}\,;\ \overline{C \to D} \to \overline{A \to B}\,;\ (D \wedge E) \to F$

$\vdash\ \overline{E} \vee F$

PS 31
2003 (2)

$(A \to \overline{A}) \wedge B;\ (A \to C) \to (D \to E);\ (E \wedge F) \to H\,;\ F$

$\vdash\ E \to H$

PS 32
2004 (1)

$(A \leftrightarrow B) \to \overline{C}\,;\ \overline{A \vee B}\,;\ (C \wedge F) \vee E$

$\vdash\ E$

PS 33
2004 (2)

$A \leftrightarrow (C \wedge B);\ C \wedge F;\ \overline{B} \to (A \wedge C)$

$\vdash\ \overline{A} \to [(H \wedge G) \to E]$

PS 34
2005 (1)

$\overline{S \to R}\,;\ (P \wedge Q) \to R;\ \overline{S} \vee Q$

$\vdash\ \overline{P}$

PS 35
2005 (2)

$S \leftrightarrow P;\ P \to (Q \to R);\ R \to \overline{R}$

$\vdash\ Q \to \overline{S}$

PS 36
2006 (1)

$A \to (B \wedge C);\ \overline{A} \to \overline{D \to E}\,;\ E$

$\vdash\ B$

PS 37
2006 (2)

$\overline{A \to B} \to \overline{C}\,;\ \overline{\overline{B} \to \overline{D}}\,;\ (\overline{D} \to E) \to A;\ E \to (C \wedge F)$

$\vdash\ \overline{E}$

PS 38
2007 (1)

$F \leftrightarrow \overline{B}\,;\ \overline{\overline{D} \vee E} \to (B \wedge \overline{C})$

$\vdash\ F \to (\overline{E} \to \overline{D})$



2.5.2 Preuve conditionnelle

2.5.2.1 PRINCIPE

La preuve conditionnelle (PC) consiste à admettre une hypothèse (une condition) pour déduire la conclusion.

Dans certains cas, nos règles de déduction et lois logiques ne suffisent pas pour faire la déduction demandée. Dans le cas où la **conclusion est une implication non niée ou réductible à une telle**, on peut procéder à une **preuve conditionnelle**.

Elle consiste à admettre comme hypothèse additionnelle, l'antécédent de l'implication cherchée. Si, sous cette hypothèse, le conséquent peut être déduit comme conclusion intermédiaire, alors celui-ci est vrai comme toute ligne d'une déduction. Mais, par ailleurs, l'implication entière est vraie aussi puisqu'il suffit que le conséquent soit vrai pour qu'une implication soit vraie (voir tables).

Un raisonnement valide peut être considéré comme une implication vraie dans tous les cas. Si la prémisse 1 et la prémisse 2 etc. sont vraies et si la conclusion sous forme de conditionnelle est vraie, alors on peut ajouter la condition de la conclusion aux autres conditions que sont les prémisses.

En fait, on ne fait qu'appliquer la loi logique de l'exportation.

Tout raisonnement ayant la forme:

Prémisses $\Rightarrow$ Conclusion

si l'on a un raisonnement de la forme:

$(P_1 \wedge P_2 .. \wedge P_n) \Rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

alors on peut admettre aussi:

$(P_1 \wedge P_2 .. \wedge P_n \wedge \alpha) \Rightarrow \beta$ **par exportation**

et il suffira de démontrer:

β

Si le conséquent est composé d'une suite d'implications, on peut utiliser chaque antécédent comme hypothèse à condition que tous mènent à leur conséquent respectif et que l'ordre de ces implications corresponde à l'ordre de la conclusion[90].

[90] cf. exercice 2 ci-dessous.

2.5.2.2 CONSEILS

Aux conseils donnés pour la preuve formelle on pourra ajouter les considérations suivantes:

- essayer si la contraposition de la conclusion ne produit pas une hypothèse additionnelle plus «productive»;

- si le conséquent à déduire par PC n'apparaissait pas dans les prémisses, il ne pourrait être déduit, mais par contraposition il sera la seule hypothèse additionnelle productive;

- se rappeler que la conclusion peut aussi être une *implication cachée* sous forme d'une:
  - disjonction $[\bar{p} \vee q]$,
  - conjonction niée $[\overline{p \wedge \bar{q}}]$,
  - expression distribuée (cf. LL de l'implication);

- la dernière ligne correspondra toujours à la conclusion telle qu'elle a été donnée dans l'exercice. La ligne comportant la PC n'est donc pas forcément toujours la dernière ligne! Ceci vaut pour le cas de *l'implication cachée* ci-dessus.

2.5.2.3 EXERCICES COMMENTÉS

Exercice 1

Raisonnement

(1) $P \rightarrow Q$

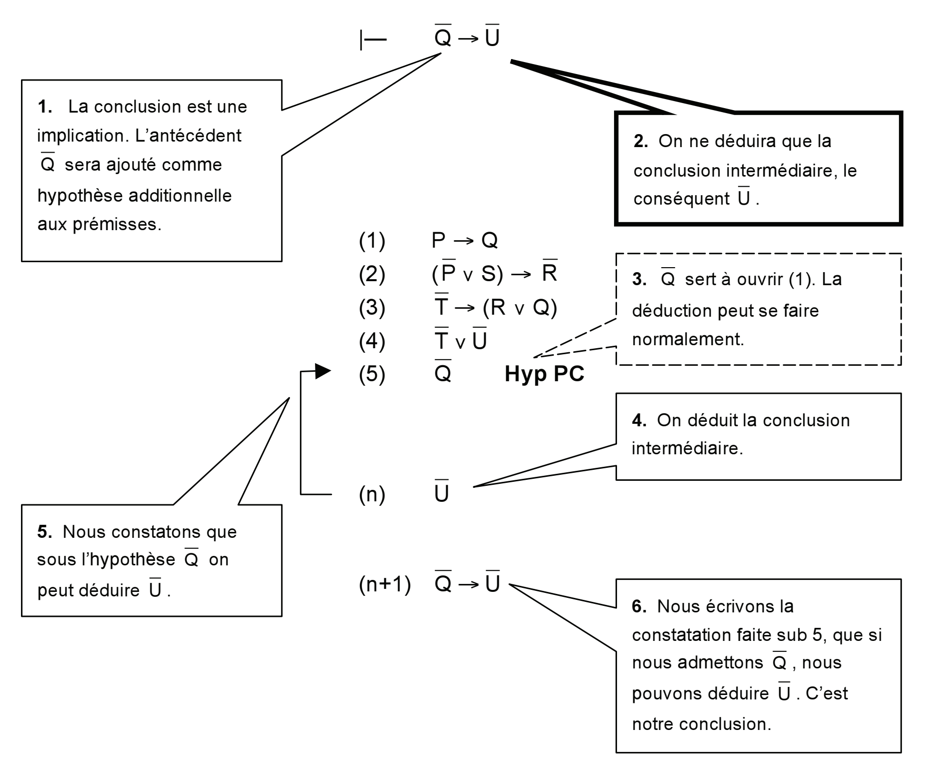
(2) $(\overline{P} \vee S) \rightarrow \overline{R}$

(3) $\overline{T} \rightarrow (R \vee Q)$

(4) $\overline{T} \vee \overline{U}$ $\quad\quad$ $\vdash \overline{Q} \rightarrow \overline{U}$

Stratégie

On se limitera aux aspects relevant de la seule méthode de la PC



L'hypothèse additionnelle nous donne un instrument supplémentaire pour travailler les différentes expressions, simplifiant ainsi le travail de déduction.

Déduction

(1)	$P \rightarrow Q$	
(2)	$(\overline{P} \vee S) \rightarrow \overline{R}$	
(3)	$\overline{\overline{T}} \rightarrow (R \vee Q)$	
(4)	$\overline{\overline{T}} \vee \overline{U}$	$\vdash \overline{Q} \rightarrow \overline{U}$
(5)	$\overline{Q}$	Hyp PC
(6)	$\overline{P}$	MT 1; 5
(7)	$\overline{P} \vee S$	Add 6
(8)	$\overline{R}$	MP 2; 7
(9)	$\overline{R} \wedge \overline{Q}$	Conj 5; 8
(10)	$\overline{R \vee Q}$	DM 9
(11)	T	MT 3; 10
(12)	$\overline{U}$	SD 4; 11
(13)	$\overline{Q} \rightarrow \overline{U}$	PC 5 - 12

Commentaires

La flèche (qui n'est pas indispensable!) n'est qu'un moyen graphique pour souligner que la ligne (12) est déduite sous cette hypothèse. On l'utilisera utilement en marquant, avec sa pointe, l'hypothèse dès qu'elle aura été posée!

La **dernière ligne est indispensable**, car c'est bien là ce qu'il y avait à déduire! On y indiquera que cette ligne est obtenue par cette démarche de la PC tout en signalant de quelle ligne à quelle autre ligne va cette démarche [ici (5) à (12)].

La déduction peut être faite par preuve formelle simple, mais est beaucoup plus longue et compliquée (18 lignes en tout):

(5)	$(\overline{P} \rightarrow \overline{R}) \wedge (\overline{S} \rightarrow \overline{R})$	Dist 2
(6)	$\overline{P} \rightarrow \overline{R}$	Simp 5
(7)	$R \rightarrow P$	Cont 6
(8)	$R \rightarrow Q$	SH 1; 7
(9)	$\overline{Q} \rightarrow \overline{R}$	Cont 8
(10)	$T \rightarrow \overline{U}$	Imp 4
(11)	$U \rightarrow \overline{\overline{T}}$	Cont 10
(12)	$U \rightarrow (R \vee Q)$	SH 3; 11
(13)	$\overline{R \vee Q} \rightarrow \overline{U}$	Cont 12
(14)	$(\overline{R} \wedge \overline{Q}) \rightarrow \overline{U}$	DM 13
(15)	$\overline{R} \rightarrow (\overline{Q} \rightarrow \overline{U})$	Exp 14
(16)	$\overline{Q} \rightarrow (\overline{Q} \rightarrow \overline{U})$	SH 9; 15
(17)	$(\overline{Q} \wedge \overline{Q}) \rightarrow \overline{U}$	Exp 16
(18)	$\overline{Q} \rightarrow \overline{U}$	Taut 17

Comparée à la PC, cette déduction est très complexe.

Exercice 2

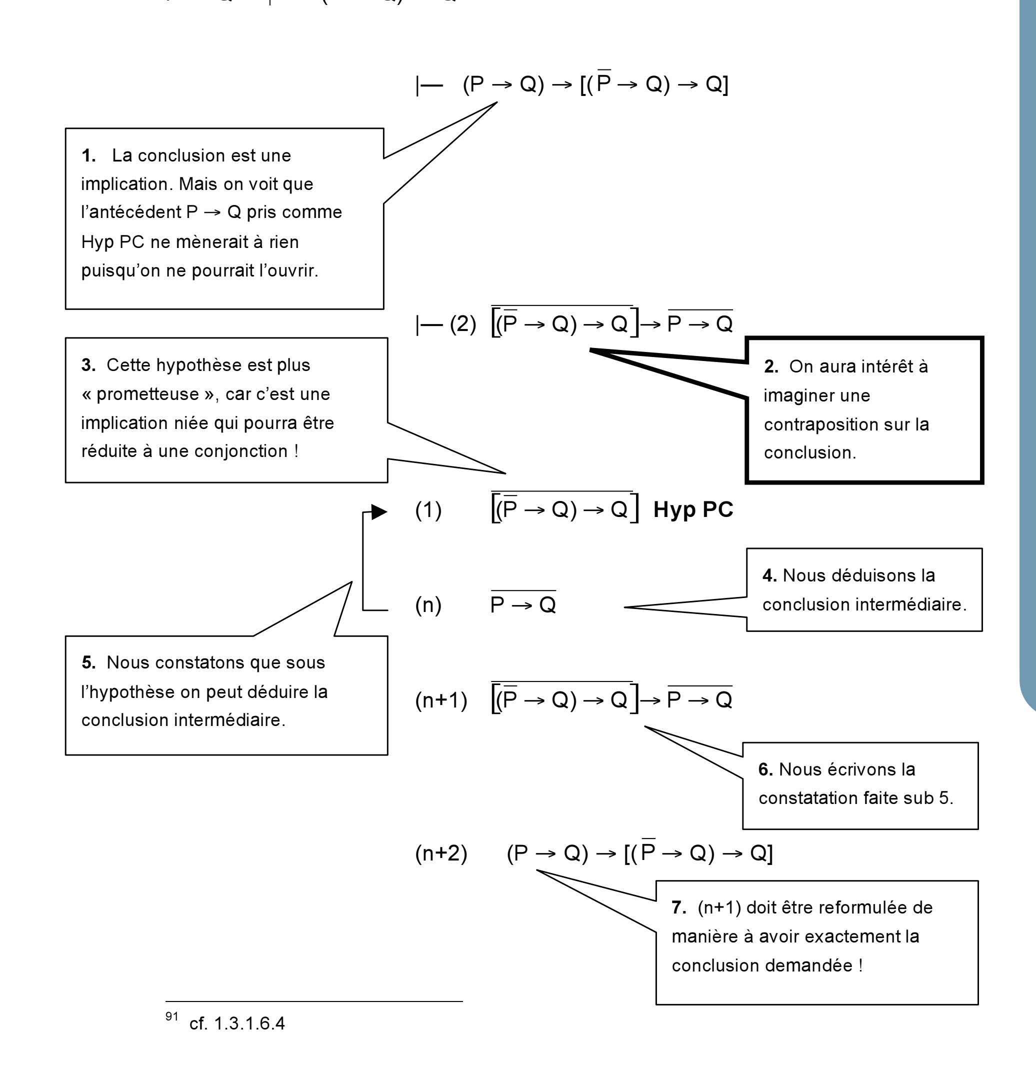
Raisonnement

(1) ----- $\vdash (P \to Q) \to [(\overline{P} \to Q) \to Q]$

Stratégie

Le «raisonnement» ne comporte qu'une «conclusion». Il s'agit en fait d'une loi logique qui rend compte du raisonnement suivant[91]:

$P \to Q \quad \vdash \quad (\overline{P} \to Q) \to Q$



91 cf. 1.3.1.6.4

Déduction

$$\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow [(\overline{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q]$$

$$\vdash(2)\quad \overline{(\overline{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q} \rightarrow \overline{P \rightarrow Q}$$

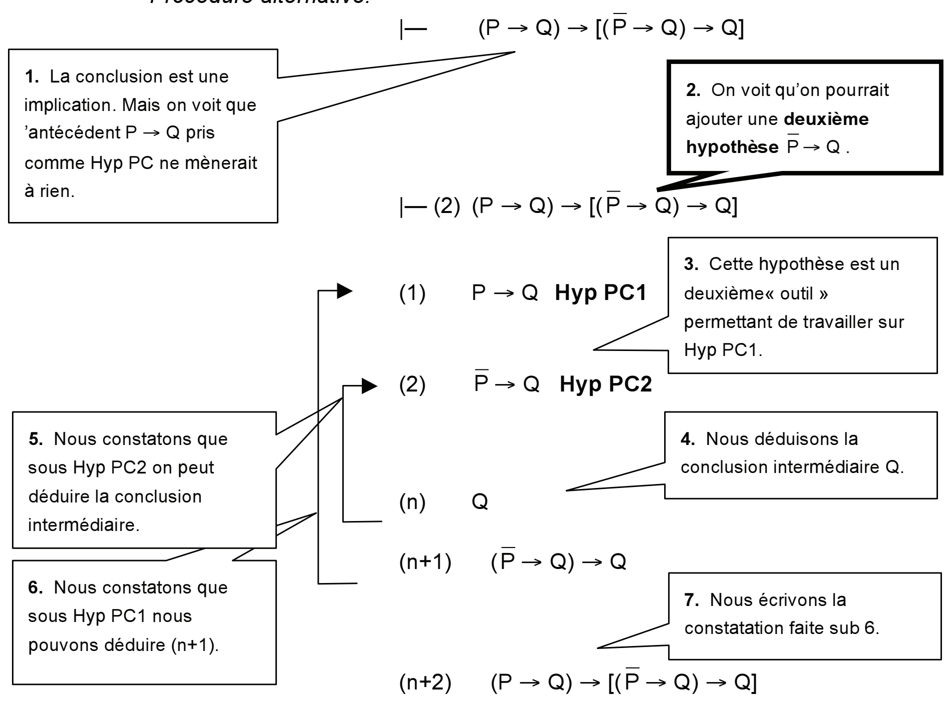
(1)	$\overline{(\overline{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q}$	Hyp PC
(2)	$(\overline{P} \rightarrow Q) \wedge \overline{Q}$	Ne.Imp 1
(3)	$\overline{P} \rightarrow Q$	Simp 2
(4)	$\overline{Q}$	Simp 2
(5)	P	MT 3; 4
(6)	$P \wedge \overline{Q}$	Conj 4; 5
(7)	$\overline{P \rightarrow Q}$	Ne.Imp 6
(8)	$\overline{(\overline{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q} \rightarrow \overline{P \rightarrow Q}$	PC 1 - 7
(9)	$(P \rightarrow Q) \rightarrow [(\overline{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q]$	Cont 8

Commentaires

Ici la contraposition de la conclusion est incontournable, car $(P \rightarrow Q)$ ne permet en aucune manière de déduire $[(\overline{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q]$. En guise d'aide-mémoire on pourra indiquer la conclusion, sous sa forme provisoire $\vdash(2)$.

Il ne faudra pas s'arrêter à la ligne (8) et oublier d'écrire la dernière ligne, car c'est elle qu'il s'agit de déduire.

Procédure alternative:



Déduction

|— (P → Q) → [($\overline{P}$ → Q) → Q]

(1)	P → Q	Hyp PC1
(2)	$\overline{P}$ → Q	Hyp PC2
(3)	$\overline{Q}$ → P	Cont 2
(4)	$\overline{Q}$ → Q	SH 1; 3
(5)	Q v Q	Imp 4
(6)	Q	Taut 5
(7)	($\overline{P}$ → Q) → Q	PC 2 - 6
(8)	(P → Q) → [($\overline{P}$ → Q) → Q]	PC 1 - 7

Commentaires

La ligne 6 est déduite sous les deux hypothèses, mais découle directement de la ligne 2. Nous l'indiquons par la ligne 7, qui elle-même est déduite sous l'hypothèse de la ligne 1. Nous écrivons cette constatation à la ligne 8.

Exercice 3

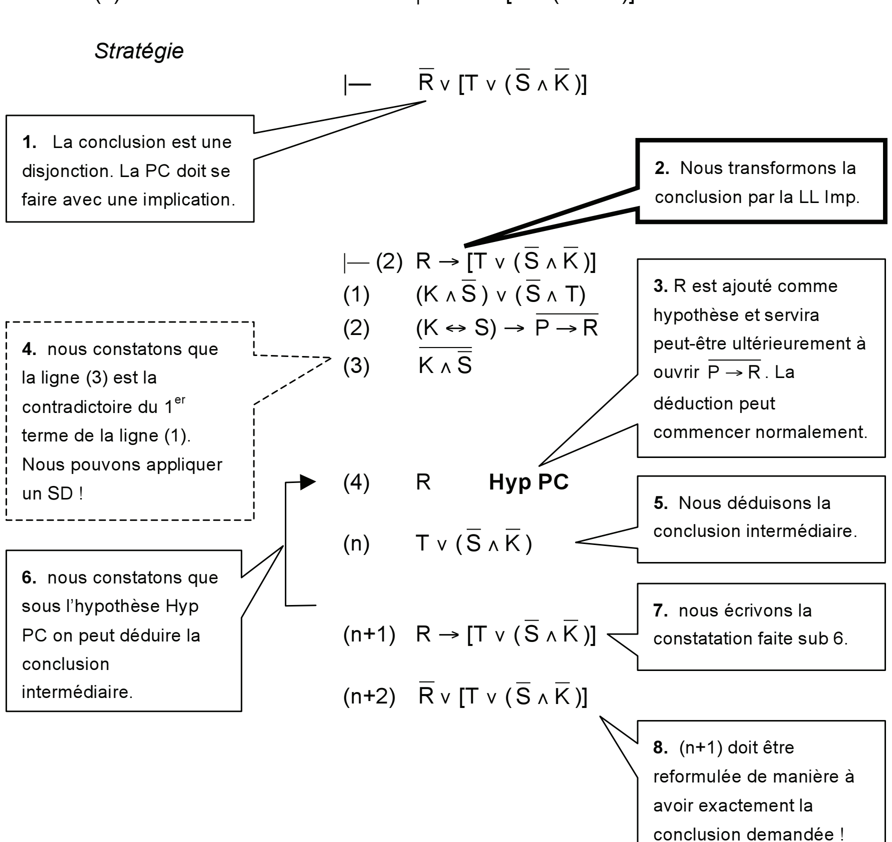
Raisonnement

(1) $(K \wedge \overline{S}) \vee (\overline{S} \wedge T)$

(2) $(K \leftrightarrow S) \rightarrow \overline{P \rightarrow R}$

(3) $\overline{K \wedge \overline{S}}$ $\quad\vdash\quad \overline{R} \vee [T \vee (\overline{S} \wedge \overline{K})]$

Stratégie



Déduction

(1)	$(K \wedge \overline{S}) \vee (\overline{S} \wedge T)$	
(2)	$(K \leftrightarrow S) \rightarrow \overline{P \rightarrow R}$	
(3)	$\overline{K \wedge \overline{S}}$	$\vdash \overline{R} \vee [T \vee (\overline{S} \wedge \overline{K})]$
		$\vdash_{(2)}\ R \rightarrow [T \vee (\overline{S} \wedge \overline{K})]$
(4)	$\rightarrow R$	Hyp PC
(5)	$\overline{S} \wedge T$	SD 1; 3
(6)	T	Simp 5
(7)	$T \vee (\overline{S} \wedge \overline{K})$	Add 6
(8)	$R \rightarrow [T \vee (\overline{S} \wedge \overline{K})]$	PC 4 - 7
(9)	$\overline{R} \vee [T \vee (\overline{S} \wedge \overline{K})]$	Imp 8

Commentaires

Contrairement à ce qu'on pouvait penser sub 3, l'hypothèse additionnelle n'a d'autre fonction que d'être la condition de la conclusion intermédiaire.

La prémisse (2) est en effet totalement inutile à cette déduction. Ceci est parfaitement légitime. Pourquoi un raisonnement valide fait à partir de deux prémisses deviendrait-il non-valide par l'adjonction d'une ou plusieurs prémisses supplémentaires?

Ici encore, on se simplifie de beaucoup la tâche si l'on voit les grandes structures des prémisses. Ainsi (1) et (3) ont comme structure $p \vee q$, respectivement $\overline{p}$ qui sont les structures requises pour faire un SD.

2.5.2.4 APPLICATIONS [PC]

PC 1 — 1988 (1)

$P \rightarrow [(\overline{Q} \vee R) \rightarrow S]; [(\overline{P} \vee \overline{S}) \wedge (\overline{S} \rightarrow P)] \wedge (\overline{S} \vee P)$

$\vdash (R \rightarrow S) \rightarrow \overline{R}$

PC 2 — 1988 (2)

$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (R \wedge S); P \rightarrow Q$

$\vdash (\overline{P} \wedge \overline{Q}) \rightarrow (\overline{R} \rightarrow S)$

PC 3 — 1989 (1)

$(P \wedge Q) \rightarrow [R \rightarrow (S \leftrightarrow T)]; (R \rightarrow P) \wedge Q$

$\vdash (\overline{P} \rightarrow R) \rightarrow [(\overline{S \wedge T} \wedge \overline{\overline{S} \wedge \overline{T}}) \rightarrow \overline{R}]$

PC 4 — 1990 (1)

$(P \vee Q) \rightarrow (R \leftrightarrow S); \overline{\overline{S} \wedge P}; \overline{T} \rightarrow \overline{R}$

$\vdash P \rightarrow (T \wedge R)$

PC 5 — 1991 (1)

$A \rightarrow B; B \rightarrow C$

$\vdash (A \vee B) \rightarrow [\overline{C} \rightarrow (C \wedge D)]$

PC 6 — 1991 (2)

$A \rightarrow B; \overline{C} \rightarrow \overline{A \wedge B}; B \rightarrow (C \rightarrow D)$

$\vdash A \rightarrow D$

PC 7 — 1992 (2)

$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (R \wedge S); (\overline{R} \rightarrow R) \wedge (T \rightarrow S)$

$\vdash T \rightarrow (P \rightarrow Q)$

PC 8 — 1993 (2)

$\overline{A \wedge B} \rightarrow \overline{C}; B \leftrightarrow D; A \rightarrow (\overline{E} \rightarrow F)$

$\vdash \overline{C} \vee [(E \vee F) \wedge D]$

PC 9 — 1994 (1a)

$P \rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow S]; (P \leftrightarrow \overline{S}) \wedge \overline{S \wedge \overline{P}}$

$\vdash (\overline{R} \rightarrow T) \rightarrow T$

PC 10 — 1994 (1n)

$(E \vee A) \rightarrow D; B \leftrightarrow \overline{C}; \overline{E} \rightarrow (B \rightarrow A)$

$\vdash \overline{D} \rightarrow C$

PC 11 — 1994 (2a)

$P \vee R$

$\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow [(S \rightarrow Q) \vee R]$

PC 12 — 1994 (2n)

$P \leftrightarrow \overline{S}; S \rightarrow P; P \rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow S]$

$\vdash \overline{T} \rightarrow \overline{R \vee T}$

PC 13 — 1995 (1)

$\overline{A} \vee (B \wedge C)$

$\vdash \overline{B \wedge C \wedge D} \rightarrow \overline{D \wedge A}$

PC 14 $(A \leftrightarrow B) \to (\overline{C} \lor D);\ \overline{A} \lor B$
1996 (2) $\vdash\ [C \land (\overline{B} \lor A)] \to (\overline{D} \to E)$

PC 15 $(P \lor Q) \to [(R \lor S) \to (T \land U)];\ (T \lor V) \to W$
1997 (1) $\vdash\ (P \land R) \to W$

PC 16 $(A \leftrightarrow B) \to (\overline{C} \lor D);\ A \to B$
1998 (1) $\vdash\ [\overline{C \to B} \lor (A \land C)] \to (C \land D)$

PC 17 $Q \to (S \land \overline{P});\ R \leftrightarrow (T \to \overline{Q})$
1998 (2) $\vdash\ P \to R$

PC 18 $A \to (B \land E);\ C \leftrightarrow B;\ (E \land \overline{F}) \to D$
1999 (1) $\vdash\ A \to [C \land (\overline{D} \to F)]$

PC 19 $\overline{P \land S} \to \overline{R};\ (S \land T) \lor (\overline{S} \land \overline{T});\ P \to (\overline{Q} \to U)$
1999 (2) $\vdash\ R \to [(Q \lor U) \land T]$

PC 20 $[(\overline{K} \lor \overline{P}) \land (\overline{P} \to K)] \land (\overline{P} \lor K);\ K \to [(\overline{L} \lor M) \to P]$
2002 (1) $\vdash\ (M \to P) \to \overline{M}$

PC 21 $\overline{A \land B} \lor [C \lor (D \land G)];\ \overline{B \to (A \to C)}$
2002 (2) $\vdash\ (\overline{E} \lor \overline{F}) \to (D \land G)$

PC 22 $(C \lor D) \to F;\ \overline{C} \to (\overline{D} \to B);\ A \to \overline{B}$
2004 (1) $\vdash\ \overline{B} \to F$

PC 23 $R \to P;\ \overline{P} \lor Q;\ U \to \overline{T};\ (\overline{T} \to R) \lor (\overline{T} \to Q)$
2005 (1) $\vdash\ U \to Q$

PC 24 $A \leftrightarrow B;\ (A \land B) \to C;\ B \to (C \to D)$
2005 (2) $\vdash\ A \to D$

PC 25 $\overline{C} \lor (A \to \overline{B});\ \overline{D} \to (A \land C);\ \overline{E} \lor B$
2006 (1) $\vdash\ E \to D$

PC 26 $(C \leftrightarrow D) \to (E \to F);\ \overline{C} \lor D$
2007 (2) $\vdash\ [(E \land \overline{D}) \lor (E \land C)] \to F$



2.5.3 Réduction à l'absurde

2.5.3.1 PRINCIPE

La preuve par réduction à l'absurde (RA) consiste à montrer que la conclusion est vraie, car il serait absurde d'admettre son contraire.

Pour prouver qu'une conclusion est vraie, donc consistante avec les prémisses données, on va ainsi montrer que la conclusion niée est inconsistante avec les prémisses données, c'est-à-dire que **si l'on admet, par hypothèse, la conclusion niée, on peut déduire deux propositions contradictoires**.

Nous aurions ainsi **réduit à l'absurde** l'hypothèse envisagée.

Ceci montre alors que l'on ne peut admettre la conclusion niée avec les prémisses et qu'il faut donc admettre son contraire, à savoir la conclusion (puisque nous sommes dans une logique à deux valeurs [principe du tiers exclu]).

2.5.3.2 CONSEILS

Comme il s'agit de produire une contradiction, on veillera à:

- décomposer systématiquement les expressions complexes en des expressions plus simples jusqu'aux propositions élémentaires;

- vérifier soigneusement à chaque étape si la déduction ne comporte pas déjà une contradiction, sachant qu'elle peut prendre la forme de:
  - deux propositions élémentaires (comme A et $\overline{A}$), ce qui est le cas habituellement recherché,
  - deux propositions complexes ainsi $(A \rightarrow B) \wedge C$ est contradictoire avec $\overline{(A \rightarrow B) \wedge C}$;

- arrêter la déduction dès la production de la 1ère contradiction;

- écrire la conclusion recherchée.

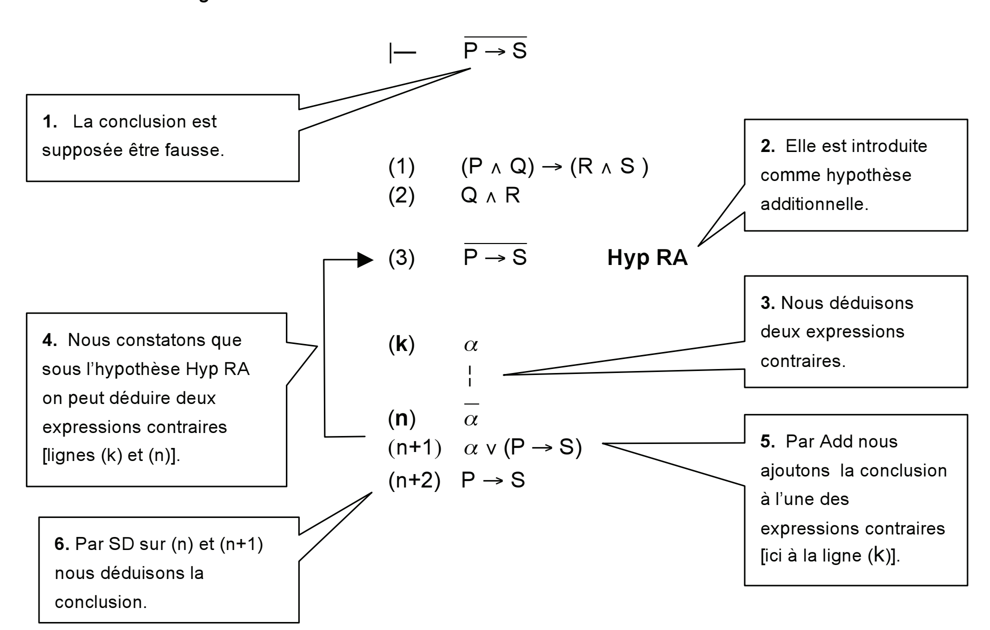
2.5.3.3 EXERCICE COMMENTÉ

Raisonnement

(1) $(P \wedge Q) \to (R \wedge S)$

(2) $Q \wedge R$ $\quad\quad \vdash P \to S$

Stratégie



Normalement nous ne pouvons jamais déduire ce que nous avons ajouté par addition à une formule! Ici c'est possible uniquement parce que nous avons deux expressions contraires. Ceci illustre le principe que le faux entraîne n'importe quoi! [*ex falso (sequitur) quodlibet* ou *ex contradictione sequitur quodlibet*][92].

[92] Du faux on peut déduire ce que l'on veut.

Déduction

(1)	$(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S)$	
(2)	$Q \wedge R$	$\vdash P \rightarrow S$
(3)	$\overline{P \rightarrow S}$	Hyp RA
(4)	$P \wedge \overline{S}$	Ne.Imp 3
(5)	P	Simp 4
(6)	$\overline{S}$	Simp 4
(7)	Q	Simp 2
(8)	R	Simp 2
(9)	$P \wedge Q$	Conj 5; 7
(10)	$R \wedge S$	MP 1; 9
(11)	S	Simp 10
(12)	$S \vee (P \rightarrow S)$	Add 11
(13)	$P \rightarrow S$	SD 6; 13

Commentaires

Il s'agit ici de la preuve complète. Pour simplifier un peu la démarche, on se contentera en pratique d'écrire après l'obtention des deux expressions contraires:

(11)	S	Simp 10
(14)	$S \rightarrow R$	RA 6 et 11

Nous notons donc la conclusion recherchée avec la remarque RA et **en spécifiant les deux lignes qui sont en contradiction**.

La flèche (qui n'est pas indispensable!) n'est ici aussi, comme pour la PC, qu'un moyen graphique pour souligner que la contradiction est **déduite sous une certaine hypothèse**. Certains auteurs l'utilisent pour relever graphiquement les deux lignes contradictoires [dans notre exemple de la ligne 13 à la ligne 6]. Ceci serait redondant avec notre pratique de noter à la dernière ligne les deux lignes qui sont en contradiction.

2.5.3.4 APPLICATIONS [RA]

RA 1
1989 (2)
$(P \wedge K) \vee (P \wedge R);\ H \rightarrow \overline{H};\ (P \wedge S) \rightarrow \overline{Q \vee T};\ \overline{S} \rightarrow H$
$\vdash\ \overline{T}$

RA 2
1992 (1)
$\overline{A} \vee [(\overline{B} \vee C) \vee \overline{D}];\ \overline{B} \rightarrow \overline{A \wedge D};\ \overline{A} \vee D$
$\vdash\ A \rightarrow C$

RA 3
1993 (1)
$(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D);\ \overline{A} \rightarrow (E \rightarrow \overline{E});\ \overline{C}$
$\vdash\ \overline{E}$

RA 4
1995 (2)
$\overline{P} \vee [(\overline{Q} \vee R) \vee \overline{S}];\ \overline{Q} \rightarrow \overline{P \wedge S};\ \overline{P} \vee S$
$\vdash\ P \rightarrow R$

RA 5
1996 (1)
$(\overline{A} \vee B) \rightarrow (\overline{C} \vee D);\ A \wedge C$
$\vdash\ \overline{B} \vee D$

RA 6
1997 (1)
$B \rightarrow C;\ B \vee D;\ (A \wedge B) \leftrightarrow (C \rightarrow D)$
$\vdash\ C$

RA 7
1997 (2)
$\overline{B} \rightarrow \overline{A};\ (C \wedge D) \leftrightarrow A;\ \overline{A} \vee \overline{B}$
$\vdash\ C \rightarrow \overline{D}$

RA 8
2000 (1)
$[(A \rightarrow B) \wedge C] \rightarrow D;\ A \rightarrow \overline{E}$
$\vdash\ (C \rightarrow D) \vee \overline{E}$

RA 9
2000 (2)
$\overline{Q \vee \overline{R}} \vee (\overline{S} \rightarrow \overline{T});\ U \leftrightarrow \overline{R}$
$\vdash\ (T \wedge \overline{S}) \rightarrow \overline{U}$

RA 10
2001 (1)
$A \leftrightarrow O;\ A \rightarrow \overline{L}$
$\vdash\ (O \wedge L) \rightarrow (L \rightarrow Y)$

RA 11
2001 (2)
$(A \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow C);\ A \wedge B$
$\vdash\ D \rightarrow C$

RA 12
2002 (1)
$\overline{K \rightarrow (L \rightarrow M)}$
$\vdash\ \overline{(K \rightarrow L) \rightarrow M}$

RA 13
2003 (1)
$(P \rightarrow S) \rightarrow (Q \rightarrow R);\ P \wedge Q$
$\vdash\ S \rightarrow R$

RA 14
2003 (2)

$A \leftrightarrow B;\ B \rightarrow \overline{C \wedge D};\ (\overline{D} \vee E) \rightarrow F;\ \overline{F}$

$\vdash\ \overline{A \wedge C}$

RA 15
2004 (2)

$P \vee (T \wedge K) \vee (T \wedge Q)$

$\vdash\ \overline{K \rightarrow P} \rightarrow T$

RA 16
2006 (2)

$\overline{\overline{P} \vee Q \vee R}$

$\vdash\ P \rightarrow (\overline{R} \rightarrow \overline{Q})$

RA 17
2007 (1)

$\overline{B \vee C} \vee (D \wedge E);\ \overline{B} \rightarrow (F \rightarrow \overline{F});\ \overline{D}$

$\vdash\ \overline{F}$

RA 18
2007 (2)

$(R \rightarrow S) \rightarrow (A \rightarrow B);\ \overline{R} \leftrightarrow C$

$\vdash\ C \rightarrow (A \rightarrow B)$



3.1 SYLLOGISMES

Tirer la conclusion:

SY 1 1=E, 2=A, F=4, M=FESAPO
C: Quelques animaux à nageoires ne sont pas des poissons.

SY 2 1=E, 2=A, F=2, M=CESARE
C: La baleine n'est pas un poisson.

SY 3 1=A, 2=A, F=2, M=/
C: *pas de conclusion*

SY 4 1=E, 2=A, F=1, M=CELARENT
C: Un poisson n'est pas une baleine.

SY 5 1=E, 2=E, 2 négatives
C: *pas de conclusion*

SY 6 1=A, 2=A, F=3, M=DARAPTI
C: Quelques Belges sont des Européens.

SY 7 1=E, 2=A, F=3, M=FELAPTON
C:Quelques corps célestes ne sont pas des étoiles fixes.

SY 8 1=A, 2=A, F=2, M= /
C: *pas de conclusion*

SY 9 1=A, 2=O (sont incompatibles = ne sont pas compatibles), F=2, M=BAROCO
C: Certaines formes de patriotisme ne sont pas des vertus.

SY 10 1=E, 2=A, F=4, M=FESAPO
C: Il y a des vaisseaux sanguins qui ne sont pas des artères.

SY 11 1=I, 2=A, F=3, M=DISAMIS
C: Quelques objets faits pour éclairer le font très mal.

SY 12 1=E, 2=O, 2 négatives
C: *pas de conclusion*

SY 13 1=A, 2=E, F=3, M=/, ↓↑,1=E, 2=A, F=3, M=FELAPTON
C: Quelques hommes ne sont pas des Sénégalais.

SY 14 1=E, 2=A (moyen terme: "courbes sans équation ..."), F=1, M=CELARENT
C: Les spirales ne sont pas des coniques.

SY 15 1=A, 2=O, F=2, M=BAROCO
C: Certains bavards ne sont pas des sots.

SY 16 1=A, 2=E (2 singulières), F=2, M=CAMESTRES
C: Cet homme n'est pas celui que la police recherche.

SY 17 A première vue 2 négatives, mais on peut reformuler: L'incomposé n'est pas divisible. L'âme est incomposée.
1=E, 2=A, F=1, M=CELARENT.
C: L'âme n'est pas divisible.

SY 18 1=A, 2=E, F=2, M=CAMESTRES
C: Les brutes ne sont pas douées de raison.

SY 19 1=A, 2=A, F=3, M=DARAPTI
C: Quelques hommes sont élèves de notre lycée.

SY 20 1=E, 2=E, 2 négatives.
C: *pas de conclusion*

SY 21 1=A, 2=A, F=3, M=DARAPTI
C: Certains phénomènes régis par des lois immuables sont imprévisibles.

SY 22 1=A, 2=E, F=1, M=/, ↓↑, 1=E, 2=A, F=4, M=FESAPO
C: Quelques êtres doués de sensibilité et de mémoire ne sont pas des bêtes.

SY 23 1=A, 2=I, F=2, M=/, figure 2 avec 2 affirmatives
C: *pas de conclusion*

SY 24 1=A, 2=O, F=3, M=/, ↓↑, 1=O, 2=A, F=3, M=BOCARDO
C: Quelques êtres féroces ne boivent pas de café.

SY 25 1=A, 2=E, F=2, M=CAMESTRES
C: Aucun homme de bonne compagnie n'est envieux.

SY 26 1=E, 2=I, F=2, M=FESTINO
C: Quelques (=presque tous les) professeurs ne sont pas autoritaires.

SY 27 1=O, 2=A, F=3, M=BOCARDO
C: Il y a des penseurs qui ne sont pas des poètes.

SY 28 1=I, 2=A, F=4, M=DIMATIS
C: Il existe des scientifiques qui sont professeurs.

SY 29 1=A, 2=E, F=4, M=CALEMES
C: Aucun appareil sans frein n'est une voiture de formule 1.

SY 30 Reformuler 2: Le plomb n'a pas un point de fusion élevé.
1=I, 2=E, F=2 M=/, ↓↑,1=E, 2=I, F=2, M=FESTINO
C: Quelques métaux lourds ne sont pas du plomb.

SY 31 Reformuler 2: Les pyramides ne sont pas des monolithes.
1=A, 2=E, F=2, M=CAMESTRES
C: Les pyramides ne sont pas des obélisques.

SY 32 1=A, 2=E, F=2, M=CAMESTRES
C: Un impérialiste n'est pas communiste.

SY 33 1=E, 2=I, F=2, M=FESTINO
C: Il y a des huîtres qui ne sont pas des fossiles.

SY 34 1=E, 2=I, F=4, M=FRESISON
C: Il y a des situations ridicules qui ne sont pas des difficultés.

SY 35 Reformuler 1: Quelques choses brillantes ne sont pas de l'or.
1=O, 2=A, F=1, M=/, ↓↑,1=A, 2=O, F=4, M=/
C: *pas de conclusion*

Vérifier la conclusion

SY 36 1=A, 2=E, F=1, M=/
C: incorrecte

SY 37 1=A, 2=E, F=2, M=CAMESTRES
C: correcte

SY 38 1=A, 2=A, F=3, M=DARAPTI
C: incorrecte
C correcte: Quelques habitants de la terre ont un corps.

SY 39 1=E, 2=A, F=2, M=CESARE
C: correcte

SY 40 ↓↑, 1=A, 2=E, F=3, M=/
C: incorrecte
C possible: sans ↓↑, 1=E,2=A, F=3, M=FELAPTON
Quelques-uns de ceux qui conservent les coquilles d'oeufs ne sont pas altruistes.

SY 41 ↓↑, 1=A, 2=E, F=1, M=/
C: incorrecte

SY 42 Reformuler 2: Tout banquier est prudent.:
1=A, 2=A, F=1, M=BARBARA
C: correcte

SY 43 ↓↑, 1=A, 2=E, F=1, M=/
C: incorrecte

SY 44 Reformuler 2: Les étudiants ne sont pas sans instruction.
1=A, 2=E, F=1, M=/
C: incorrecte
C possible: ↓↑, 1=E, 2=A, F=4, M=FESAPO
Quelques superficiels ne sont pas des étudiants.

SY 45 1=E, 2=A, F=3, M=FELAPTON
C: correcte

SY 46 Reformuler 1: Toute brouette est inconfortable.
↓↑, 1=E, 2=A, F=1, M=CELARENT
C: correcte

SY 47 ↓↑, 1=E, 2=A, F=3, M=FELAPTON
C: correcte

SY 48 ↓↑, 1=A, 2=I, F=3, M=DATISI
C: correcte

SY 49 1=E, 2=A, F=2, M=CESARE
C: correcte

SY 50 C: incorrecte (moyen terme dans la conclusion)

SY 51 1=A, 2=O, F=2, M=BAROCO
C: correcte

SY 52 Reformuler 2: Mes professeurs ne manquent pas de générosité.
1=I, 2=E, F=2, M=/
C: incorrecte

SY 53 ↓↑,1=E, 2=I, F=2, M=FESTINO
C: correcte (Quelques philosophes ne sont pas Descartes.)

SY 54 1=E, 2=A, F=2, M=CESARE
C: correcte

SY 55 ↓↑, 1=E, 2=A, F=2, M=CESARE
C: correcte

SY 56 1=A, 2=E, F=2, M=CAMESTRES
C: correcte

SY 57 ↓↑, 1=E, 2=A, F=3, M=FELAPTON
C: correcte

SY 58 1=A, 2=A, F=1, M=BARBARA
C: correcte

SY 59 1=E, 2=I, F=4, M=FRESISON
C: correcte

SY 60 1=A, 2=E, F=4, M=CALEMES
C: correcte (avec O=subalterne de E)
ou directement par CALEMOP



3.2 PARALOGISMES ET SOPHISMES

PAR 1 Je suis certain que ton professeur sera raisonnable dans l'appréciation de tes performances en logique. Après tout, l'homme est un animal raisonnable.

Le raisonnement pèche par équivocité du terme «raisonnable». Dans la prémisse il est employé au sens de «doué de raison», alors que dans la conclusion il signifie: «faire preuve de mesure».

PAR 2 Chaque producteur est libre de fixer le prix de la marchandise qu'il a produite. Il est donc parfaitement normal que tous les producteurs se réunissent pour fixer le prix des marchandises qu'ils ont tous produites.

Qu'un seul producteur fixe ses prix est une chose, que tous fixent un prix d'un commun accord est une chose différente (= formation d'un cartel). On commet ici un paralogisme 'secundum quid', une généralisation abusive.

PAR 3 La tricherie aux épreuves scolaires n'est pas immorale, puisque c'est une pratique courante dans nos écoles.

Ce raisonnement passe d'une pratique courante à une évaluation morale, c'est-à-dire on passe à côté de la question. On dit que c'est un paralogisme par ignorance de la question.

PAR 4 La tricherie aux épreuves scolaires n'est pas immorale, car la majorité des jeunes et même des adultes ne la considèrent pas comme immorale.

Si la constatation qu'il y a l'accord général ou majoritaire est déterminante en matière politique, en matière éthique elle est plus que discutable! Mais dans un raisonnement il n'est jamais une justification logique, mais source du paralogisme par appel à l'accord général.

PAR 5 La tricherie aux épreuves scolaires ne peut être immorale, car il y a beaucoup de cas où elle n'a pas été punie.

Ce raisonnement pèche à deux niveaux. Il y a généralisation abusive car on ne peut conclure d'une particulière négative à une générale négative. Mais il

y a d'abord paralogisme par ignorance de la question au sens où l'on passe d'un aspect pénal à un aspect moral.

PAR 6 N'importe qui a le droit de rassembler la documentation dont il a besoin au moment où il le faut. On devrait donc autoriser les élèves à se documenter lors des épreuves scolaires.

C'est un paralogisme par accident. D'un droit général d'utiliser des documents on ne peut passer à un droit de ce faire dans n'importe quelle situation.

PAR 7 Ce qu'on n'a pas perdu, on l'a. Tu n'as pas perdu des ailes. Donc tu les as encore.

La majeure est fallacieuse, car elle pose une équivalence entre «ne pas avoir perdu» et «avoir» ignorant l'autre possibilité, celle de «n'avoir jamais eu» (Ce qu'on n'a pas perdu, on ne l'a jamais eu). Ce paralogisme par équivocité naît du caractère incomplet de la première prémisse.

PAR 8 Pour donner au Sinanthrope un statut humain, les anatomistes s'appuient sur les archéologues et les archéologues sur les anatomistes.

Le paralogisme par cercle vicieux est manifeste. Chacun se base sur les connaissances de l'autre pour fonder les siennes!

PAR 9 A un médecin, qui croyait le cancer inguérissable, on signalait des cas de guérison. Il répondit: «Ce n'était certainement pas du vrai cancer».

La conclusion du médecin dépend de sa conviction établie que «Tout cancer est inguérissable». Lui présenter le cas de cancer guérissables, c'est lui montrer que son universelle n'est pas vraie. Mais comme par principe ceci ne peut être le cas pour lui, il rejette les observations faites par ailleurs! Il commet un paralogisme par pétition de principe.

PAR 10 Le peuple ruritanien est très courageux. Or, N. est un Ruritanien. Donc N. est très courageux.

Attribuer à des éléments d'un ensemble une propriété appartenant à l'ensemble c'est faire un paralogisme par division.

PAR 11 Tout ce qui est rare est cher. Or, un appartement bon marché est rare. Donc un appartement bon marché est cher.

Le paralogisme est plus difficile à trouver. Dans la majeure, «rare» exprime une *relation économique*: ce qui est *peu fréquent* doit être payé au prix fort. Mais la relation décrite dans la mineure est d'un autre ordre: un appartement bon marché est *recherché*. Etre peu fréquent ne signifie pas forcément être recherché. Il y a donc paralogisme par équivocité sur le terme rare.

On peut aussi estimer que la majeure est fausse par généralisation abusive. Certains gaz peuvent être rares sans pour autant être chers, puisqu'on n'en a aucune utilité.

PAR 12 Jean et Jacques aiment la même femme. Or, c'est le propre des amis que d'aimer la même chose. Jean et Jacques sont donc nécessairement des amis.

Le terme «aimer» a deux sens différents. Dans la majeure, on pourrait le remplacer par «apprécient», alors que dans la mineure il signifie «éprouvent de l'amour». C'est encore un paralogisme par équivocité.

PAR 13 A un critique littéraire qui louait les écrivains français pour leur clarté, on objectait que Lessing était clair sans être Français.

Cette objection passe à côté de la question. Qu'un auteur étranger soit clair ne change rien à la clarté des auteurs français. Elle constitue un paralogisme par ignorance de la question.

PAR 14 Les élèves du lycée XY. ont organisé une matinée théâtrale. Jean est un élève du lycée XY. Donc Jean a organisé une matinée théâtrale.

On commet un paralogisme par division au sens restreint. On passe d'un usage collectif (l'ensemble des élèves) à un usage distributif de l'expression «élève».

PAR 15 Tu ne connais pas cet homme que voilà. Cet homme que voilà est ton père. Tu ne connais donc pas ton père.

Il est facile de voir dans ce raisonnement un paralogisme par équivocité. «Tu ne connais pas» dans la majeure signifie clairement: «tu ne reconnais pas». Dans la conclusion le sens est changé en «tu n'as pas d'idée qui est ton père».

PAR 16 Quiconque est affamé mange beaucoup. Or, quiconque mange peu est affamé. Donc, qui mange peu mange beaucoup.

Autre paradoxe par équivocité sur le terme «mange». Dans la majeure, il est postérieur par rapport à «affamé» (mangera), mais dans la mineure, il est antérieur à «affamé» (a mangé).

PAR 17 Celui qui fait du tort à autrui doit être puni. Or, quiconque transmet à un autre une maladie contagieuse fait du tort à un autre. Il doit donc être puni.

Dans la majeure, est puni celui qui fait du tort «intentionnellement», mais dans la mineure, on peut supposer que le tort est fait «involontairement». Il y a donc paralogisme par équivocité.

PAR 18 Ces propositions de réforme de la Caisse de Maladie ne valent rien: les médecins en sont les auteurs et ce sont eux qui profitent le plus de la Caisse de Maladie.

On suggère que, les médecins étant les bénéficiaires des propositions, celles-ci ne peuvent qu'êtres nulles. C'est un paralogisme par 'argumentum ad hominem'.

PAR 19 Les épouses de diplomates possèdent toutes une garde-robe bien garnie. Pour une femme, le meilleur moyen d'aider son mari à devenir diplomate est donc d'acheter le plus grand nombre possible de vêtements.

Ici on retourne une relation de cause à effet. C'est parce qu'elles sont des épouses d'ambassadeurs qu'elles ont la garde-robe bien garnie et pas le contraire! On commet un paralogisme 'post hoc, ergo propter hoc'.

PAR 20 Je mérite un salaire plus élevé, car je n'arrive plus à nourrir mes enfants et le plus jeune est tombé malade.

Ce salarié commet un paralogisme par ignorance de la question, la hauteur du salaire dépendant (en principe) du travail fourni.

PAR 21 Pendant la guerre on a découvert des réseaux d'espionnage en surveillant leurs communications téléphoniques. Il faudrait donc que les autorités surveillent les communications téléphoniques de toutes les personnes suspectes.

Paralogisme par 'secundum quid' ou généralisation abusive. Des mesures exceptionnelles prises en temps de guerre constituent un cas particulier que l'on ne peut généraliser hors de ces conditions particulières.

PAR 22 Il est manifeste que le socialisme est le meilleur régime politique. Les faits en sont témoins. Alors qu'à un moment donné, toute la production dépendait de l'initiative privée, c'est aujourd'hui l'Etat qui stimule ou freine la production.

En quoi le fait que «l'Etat stimule ou freine la production» prouverait-il autre chose, à savoir que le régime socialiste serait le meilleur régime politique? En déplaçant la question on commet un paralogisme par ignorance de la question.

PAR 23 Pendant la Guerre Civile des Etats-Unis, le président Lincoln fut averti que le Général Grant, qui remportait une victoire après l'autre, s'était adonné au whisky. Le président répondit: «Je voudrais que le général Grant envoyât un tonneau de son whisky au reste de mes généraux».

Si le président Lincoln avait dit ceci en parlant sérieusement, il aurait commis un paralogisme 'post hoc, ergo propter hoc'. Boire du whisky tout le temps est une chose, que cette fâcheuse tendance ait rendu possible les victoires en est une autre!

PAR 24 Le bonheur est pour chaque personne un bien. Le bonheur général est donc un bien pour l'ensemble des personnes.

Passer d'un usage distributif (chaque personne) à un usage collectif (l'ensemble des personnes) d'un terme (personne), c'est commettre un paralogisme par composition au sens restreint.

PAR 25 Pour réfuter les Eléates et leur thèse que le mouvement n'est qu'une apparence, Diogène se bornait à faire quelques grands pas.

Diogène commet un paralogisme par ignorance de la question: Zénon n'était certainement pas stupide à ce point-là! Il voulait, au contraire, montrer les difficultés qu'il y a à cerner correctement ce qu'est le temps (et l'espace)[93].

PAR 26 Le professeur de philosophie signale une faute de logique chez Marx. Certains élèves estiment qu'il a par là commis un 'argumentum ad hominem' et qu'il n'a pas le droit de dénigrer cet auteur dont il n'a même pas lu la moitié des ouvrages.

Ces chers élèves feraient mieux de s'attribuer à eux-mêmes la faute qu'ils croient déceler chez leur professeur. Relever une faute de logique chez un auteur (quel qu'il fût!), ne relève pas d'une mauvaise intention que l'on témoignerait vis-à-vis de cet auteur. Par contre, affirmer qu'on ne peut pas critiquer un auteur sur un point parce qu'on ne l'aurait pas lu entièrement, c'est commettre un paralogisme par 'argumentum ad hominem' (ici contre le professeur).

PAR 27 Le cancre X, intelligence médiocre, remet un excellent devoir fait à domicile. Le professeur prétend que ce travail n'est pas de son cru.

Là par contre, c'est effectivement le professeur qui commet un paralogisme par 'argumentum ad hominem'.

PAR 28 Il est faux que l'effet ne précède jamais sa cause. En effet: une voiture en marche est toujours précédée d'une bande d'air comprimée; et pourtant cet air comprimé est l'effet de la voiture en marche.

Il s'agit d'un paralogisme par ambiguïté du terme «précède». Dans la relation de cause à effet, la cause précède *logiquement* l'effet. Mais si, dans *le temps et l'espace* l'air comprimé précède la voiture, il n'en reste pas moins vrai que, logiquement parlant, l'air comprimé est l'effet de la voiture en marche.

---

[93] cf. Les Paradoxes 1.2.3.3

PAR 29 Lors de la constitution d'une association d'anciens soldats du service militaire obligatoire, le président de l'assemblée annonce que plus de 4000 personnes ont déclaré leur volonté d'adhésion et que ceci prouve la légitimité des revendications de cette association.

Il s'agit d'un paralogisme par appel à l'accord général. Même si le soutien de beaucoup de personnes est un indicateur pour la popularité de cette association, ceci ne la *légitime* pas pour autant. 7000 membres du Ku-Klux-Klan ne le légitiment pas !

PAR 30 343 contient trois chiffres. $7^3 = 343$. Donc: 7^3 contient trois chiffres.

C'est un paralogisme par généralisation abusive: que *par accident le nombre* 343 s'écrive avec 3 chiffres ne peut pas signifier que *toutes les manières de calculer* 343 doivent s'écrire avec trois chiffres. 7 x 7 x 7 est une de ces manières, 8.462.818 – 8.462.475 en est une autre!

PAR 31 Un grain de blé ne fait pas de bruit en tombant. Donc: mille grains de blé ne peuvent pas produire de bruit en tombant, car 0 x 1000 font 0.

Ce paralogisme est une autre formulation du paradoxe du *sorite* . Il repose sur l'ambiguïté du terme «bruit». Un grain de blé qui tombe ne fait peut-être pas de bruit que l'oreille humaine puisse entendre, mais ceci n'implique pas qu'il n'en fasse pas du tout!

PAR 32 Une autorité doit être respectée. En effet, si elle ne l'était pas, elle ne serait plus une autorité.

Ce paradoxe consiste en une pétition de principe: on admet déjà ce qui est à prouver (le respect de l'autorité) en affirmant que son contraire ne peut être le cas.



RÉSOLUTIONS D'EXERCICES

3.3 TRANSCRIPTIONS

3.3.1 Propositions

Les mentions [CN] et [CNS] pour indiquer la *condition nécessaire* et la *condition nécessaire et suffisante* sont données à titre purement pédagogique et ne figureront pas dans les transcriptions.

TR 1 Lexique:

A = le ciel est bleu
B = il pleut
C = j'ai besoin d'un parapluie
D = je suis Anglais

(1) $\overline{A} \vee \overline{B}$
(2) $\overline{B} \rightarrow \overline{C}$
(3) $D \rightarrow C$
$\vdash$ $A \rightarrow D$

TR 2 Lexique:

A = les élèves étudient les mathématiques
B = ils étudient l'économie politique
C = ils étudient la philosophie
D = ils étudient le français

(1) $(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$
(2) $\overline{C \rightarrow \overline{B}}$
$\vdash$ $A \vee D$

TR 3 Lexique:

A = les salaires augmentent
B = les prix augmentent
C = il y a une inflation
D = le gouvernement se démet
E = le gouvernement est capable de gouverner
F = les syndicats protestent

(1) $(A \wedge B) \rightarrow C$
(2) $C \rightarrow D$
(3) $E \rightarrow \overline{D}$
(4) $B \wedge F$
$\vdash$ $A \rightarrow \overline{E}$

TR 4 Lexique:

A = j'étudie le français
B = j'étudie les mathématiques
C = je peux apprécier Descartes
D = j'étudie l'anglais
E = je suis reçu au bac
F = je reste au lycée

(1) $A \wedge B$
(2) $A \rightarrow C$
(3) $\overline{D \wedge C}$
(4) $(C \wedge \overline{D}) \rightarrow \overline{E}$
(5) $\overline{E} \rightarrow F$
$\vdash$ F

TR 5 Lexique:

A = l'enquête continue
B = de nouveaux faits sont connus
C = des personnalités politiques seront impliquées
D = les journaux parleront de l'affaire
E = les politiques sont des sages

(1) $A \rightarrow B$
(2) $B \rightarrow C$
(3) $C \rightarrow \overline{D}$
(4) $(A \rightarrow \overline{D}) \rightarrow (B \rightarrow A)$
(5) $\overline{A}$
$\vdash$ $\overline{B} \vee E$

TR 6 Lexique:

A = il fait beau
B = je me promène
C = je bois un bock
D = je reste à la maison
E = je regarde la télévision
F = je me morfonds
G = j'écoute du Bach

(1) $A \wedge B$
(2) $A \rightarrow C$
(3) $\overline{B \wedge D}$
(4) $(C \wedge \overline{D}) \rightarrow \overline{E}$
(5) $\overline{E} \rightarrow F$
$\vdash$ $F \vee G$

TR 7 Lexique

A = il fait beau
B = il pleut
C = je sors
D = je bois un bock
E = je chante

(1) $(A \vee B) \rightarrow (C \rightarrow D)$
(2) $(D \rightarrow E) \rightarrow (A \wedge C)$
$\vdash$ D

TR 8 Lexique:

A = il pleut
B = le soleil brille
C = je vais au musée
D = je vais à la piscine
E = je joue au tennis

(1) $(\overline{A} \rightarrow B) \rightarrow (\overline{C} \vee D)$
(2) $(\overline{A} \vee \overline{C}) \rightarrow (D \wedge \overline{E})$
$\vdash$ D

TR 9 Lexique:

A = je suis un oiseau
B = je suis un serpent
C = je chante
D = je siffle

(1) $\overline{A \vee B} \rightarrow \overline{C \vee D}$
(2) C
$\vdash$ $\overline{A} \rightarrow B$

TR 10 Lexique:

A = j'aime les fleurs
B = j'aime les papillons
C = j'embrasse Marie
D = j'embrasse Angèle
E = je suis amoureux
F = je suis cochon
G = je suis saint
H = je serai la coqueluche …

(1) $(A \vee B) \rightarrow [(C \vee D) \rightarrow (E \wedge F)]$
(2) $(F \vee G) \rightarrow H$
$\vdash$ $A \rightarrow (C \rightarrow H)$

TR 11 Lexique:

A = les élèves apprennent quelque chose
B = c'est la faute des professeurs
C = le Ministère est vigilant
D = il faut pondre un règlement
E = la surveillance est mal faite

(1) $(\overline{A} \rightarrow B) \rightarrow (\overline{C} \vee D)$
(2) $(\overline{A} \vee \overline{C}) \rightarrow (E \wedge D)$
|— $D \vee \overline{B}$

TR 12 Lexique:

A = le député a les voix des agriculteurs
B = il gagne à la campagne
C = il a les voix des travailleurs
D = il gagne la ville
E = il est élu

(1) $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$
(2) $E \rightarrow (B \wedge D)$ [CN]
(3) $\overline{E}$
|— $A \rightarrow \overline{C}$

TR 13 Lexique:

A = je sais que je doute
B = douter est une imperfection
C = je sais que je suis imparfait
D = connaître est plus parfait que de douter
E = avoir l'idée du parfait
F = l'idée du parfait a comme origine le néant
G = l'idée du parfait a comme origine le moi
H = l'idée du parfait a comme origine l'être parfait qui est Dieu
J = de rien procède quelque chose
K = du moins procède le plus

(1) A
(2) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
(3) $D \rightarrow B$
(4) D
(5) $C \rightarrow E$ [CN]
(6) $E \rightarrow (F \vee G \vee H)$
(7) $F \rightarrow J$
(8) $G \rightarrow K$
(9) $\overline{J} \wedge \overline{K}$
|— H

TR 14 Lexique:

A = le monde créé est le meilleur possible
B = Dieu connaît un meilleur monde
C = Dieu veut créer un meilleur monde
D = Dieu peut créer un meilleur monde
E = Dieu est omniscient
F = Dieu est bon
G = Dieu est tout-puissant

(1) $\overline{A} \rightarrow (\overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D})$
(2) $\overline{B} \rightarrow \overline{E}$
(3) $\overline{C} \rightarrow \overline{F}$
(4) $\overline{D} \rightarrow \overline{G}$
(5) $F \wedge E \wedge G$
$\vdash$ A

TR 15 Lexique:

A = Dieu veut empêcher le mal
B = Dieu peut empêcher le mal (= capable d’empêcher le mal)
C = Dieu est impuissant
D = Dieu est malveillant
E = le mal existe
F = Dieu existe

(1) $(A \wedge \overline{B}) \rightarrow C$
(2) $(B \wedge \overline{A}) \rightarrow D$
(3) $E \leftrightarrow (\overline{A} \vee \overline{B})$ [CNS]
(4) $F \rightarrow (\overline{C} \wedge \overline{D})$ [CN]
(5) $E \wedge B$
$\vdash$ $\overline{F}$

Exercices d'examen

TR 16 Lexique:

A = je participe à l'excursion de notre association
B = je suis invité
C = le comité désire ma participation à l'excursion
D = je m'apprête à quitter l'association

(1) $\overline{A} \rightarrow \overline{B}$
(2) $B \rightarrow C$ [CN] $\Leftrightarrow$ $\overline{B \wedge \overline{C}}$
(3) $D \vee C$
$\vdash$ $\overline{A} \rightarrow D$ [CS]

TR 17 Lexique:

A = nous allons à Rome
B = nous pouvons faire des dias
C = nous regardons des dias
D = nous avons des soirées libres
E = nous invitons des amis
F = nos amis aiment regarder des dias
G = nos amis sont tristes
H = nos amis reviennent chez nous

(1) $\overline{A} \vee B$
(2) $C \rightarrow (D \wedge E)$ [CN]
(3) $F \vee (E \rightarrow G)$
(4) $G \rightarrow \overline{H}$
$\vdash$ $A \rightarrow F$ [CN]

TR 18 Lexique:

A = Claudette aime les exercices de logique
B = elle est heureuse
C = elle mange beaucoup de glaces à la vanille
D = elle réussit les exercices de logique
E = elle se promène en ville le jeudi
F = elle se promène en ville le dimanche
G = il fait beau
H = Claudette est (tombe) malade

(1) $A \wedge (B \rightarrow C)$ [CN]
(2) $D \rightarrow [(G \wedge \overline{H}) \rightarrow (E \wedge \overline{F})]$ $\Leftrightarrow$ $[D \wedge (G \wedge \overline{H})] \rightarrow (E \wedge \overline{F})$
(3) $C \rightarrow E$ [CN]
(4) $\overline{H} \vee C$
$\vdash$ $\overline{D \rightarrow (E \rightarrow \overline{H})}$

TR 19 Lexique:

A = Célestine s'intéresse à la musique classique
B = elle assiste à des concerts
C = elle a assez d'argent de poche
D = elle travaille pendant les vacances
E = elle achète régulièrement des pralines

(1) $\overline{A \wedge \overline{B}}$ ⇔ $A \to B$
(2) $B \to C$ [CN]
(3) $\overline{C} \vee (D \wedge \overline{E})$
|— $\overline{A \to \overline{E}}$ [CN]

TR 20 Lexique:

A = Claudette sort l'après-midi
B = elle regarde la TV
C = elle fait ses exercices de logique
D = elle aide sa maman
E = sa maman a besoin d'elle

(1) $\overline{A} \to (B \vee C \vee D)$
(2) $\overline{C \wedge B \wedge D}$
(3) $E \to D$
(4) $(C \vee B) \to \overline{D}$ [CN]
|— $\overline{E \to (C \vee B)}$

TR 21 Lexique:

A = Roméo perd ses kilos superflus
B = R somnole pendant des heures ……
C = R mange des hamburgers consistants
D = R fait un régime équilibré
E = R s'adonne au jogging
F = R retrouve sa ligne de star
G = il tombe une pluie glaciale
H = R risque d'attraper un gros rhume
I = R a attrapé un gros rhume

(1) $A \to \overline{B \wedge C}$ [CN]
(2) $(D \wedge E) \leftrightarrow F$ [CNS]
(3) $(E \wedge G) \to H$
(4) $(I \to B) \wedge (B \to C)$
|— $(E \wedge G) \to \overline{F}$

TR 22 Lexique:

A = le souverain outrepasse ses droits
B = le peuple résistera au souverain
C = le souverain est ignorant
D = le souverain est fou
E = le souverain a été établi par le peuple
F = le peuple est ignorant

(1) $A \rightarrow B$
(2) $A \rightarrow (C \wedge D)$ [CN]
(3) $E \rightarrow \overline{D}$
(4) $F \rightarrow C$
$\vdash$ $\overline{F} \rightarrow \overline{A}$

TR 23 Lexique:

A = j'achète ce terrain
B = je vends les bijoux de ma femme
C = Adam s'inscrit au cours de saxo
D = ma belle-mère pique une crise
E = Amédée cesse de se ronger les griffes
(= met fin à sa manie)

(1) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{C} \vee D)$ [CN] (*B par rapport au lexique!*)
(2) $E \leftrightarrow \overline{A}$ [CNS]
$\vdash$ $E \rightarrow (D \vee \overline{C})$



3.3.2 Prédicats

On n'indiquera plus les [CN], ni les [CNS] dont l'identification est supposée être maîtrisée.

PTR 1 Lexique:

Ax = x est député de l'Assemblée Nationale
Bx = x est républicain
Cx = x est socialiste
Dx = x est écologiste
Ex = x veut empêcher la mise en service d'une centrale nucléaire (aux frontières d'un pays ami)
Fx = x veut empêcher le fonctionnement d'une centrale nucléaire (aux frontières d'un pays ami)[94]

(1) $(\exists x)\ [Ax \wedge Bx] \wedge (\exists x)\ [Ax \wedge Cx] \wedge (\forall x)\ [Ax \rightarrow \overline{Dx}\,]$

(2) $(\forall x)\ [(Bx \vee Cx) \rightarrow \overline{Ex}\,]$

$\vdash$ $(\forall x)\ [Ex \rightarrow Dx] \rightarrow (\forall x)\ [Fx \rightarrow \overline{Ax}\,]$

PTR 2 Lexique:

univers du discours: x = candidat
Ax = x est élu
Bx = x est honnête
Cx = x est compétent
Dx = x accepte des pots de vins
Ex = x arbore un air d'honnêteté

(1) $(\forall x)\ [\,\overline{Ax} \vee (Bx \wedge Cx];$

(2) $(\exists x)\ [\,\overline{Bx \wedge Cx}\,]$

(3) $(\forall x)\ [\,\overline{Dx} \rightarrow Bx\,] \wedge (\exists x)\ [\,\overline{Dx} \wedge \overline{Cx}\,]$

(4) $(\exists x)\ [Dx \wedge Ex \wedge \overline{Bx}\,] \wedge (\exists x)\ [Dx \wedge Cx \wedge \overline{Ex} \wedge \overline{Bx}\,]$

$\vdash$ $\overline{(\forall x)[\overline{Dx} \rightarrow \overline{Ax}]}$

---

94 On pourrait éventuellement admettre un seul prédicat pour: empêcher la mise en service / le fonctionnement. Toutefois elle pourrait fonctionner sans être en service, mais pas inversement! Il faut d'abord qu'elle fonctionne avant d'être de quelque utilité.

PTR 3 Lexique:

univers du discours: x = habitant de cette ville
Ax = x est agent secret
Bx = x est membre d'un club enregistré
(et $\overline{Bx}$ = x est membre d'un club secret)[95]
Cx = x est suspect
Dx = x est membre du E.T.- club
Ex = x fait secrètement partie d'un club
Fx = x est espion
j = John

(1) $(\forall x)\,[\overline{Ax} \rightarrow Bx] \wedge (\forall x)\,[Ax \rightarrow \overline{Bx}] \Leftrightarrow (\forall x)\,[\overline{Ax} \leftrightarrow Bx]$

(2) $(\exists x)\,Bx \Leftrightarrow \overline{(\forall x)\overline{Bx}}$

(3) $(\forall x)\,[\overline{Cx} \vee \overline{Bx}]$

(4) $(\exists x)\,[Cx \wedge Dx]$

(5) $(\forall x)\,[(Dx \wedge Ex) \rightarrow Fx]$

(6) $\overline{(\forall x)[Fx \rightarrow Ax]}$

(7) $Dj \wedge \overline{Cj}$

$\vdash$ Aj

PTR 4 Lexique:

Ax= x est visiteur de musée
Bx = x éprouve une satisfaction désintéressée
Cx = x estime la valeur des objets exposés
Dx = x étudie l'esthétique de Kant
Ex = x s'intéresse à la culture
Fx = x est collectionneur d'art

(1) $(\forall x)\,[Ax \rightarrow (Bx \vee Cx)]$

(2) $(\forall x)\,[Bx \rightarrow Dx]$

(3) $\overline{(\exists x)[Ex \wedge Cx]} \Leftrightarrow (\forall x)\,[Ex \rightarrow \overline{Cx}] \Leftrightarrow (\forall x)\,[\overline{Ex \wedge Cx}]$

(4) $(\exists x)\,[Fx \wedge Ax \wedge \overline{Dx}]$

$\vdash$ $(\exists x)\,[Fx \wedge \overline{Ex}]$

[95] Ceci est plus que discutable, mais on l'admettra pour simplifier le lexique.

PTR 5 Lexique:

Ax = x est un passionné de la lecture de Heidegger
Bx = x est un admirateur de la philosophie de Heidegger
Cx = x est un détracteur de Heidegger
Dx = x est un esprit impartial
Ex = x est capable de s'exprimer sur les relations entre sa philosophie et l'attitude de Heidegger

(1) $(\exists x)\ [Ax \wedge Bx] \wedge (\exists x)\ [Ax \wedge Cx] \wedge (\forall x)\ [Ax \rightarrow \overline{Dx}\,]$

(2) $(\forall x)\ [(Bx \vee Cx) \rightarrow \overline{Ex}\,]$

$\Leftrightarrow\ (\forall x)\ [Bx \rightarrow \overline{Ex}\,] \wedge (\forall x)\ [Cx \rightarrow \overline{Ex}\,]$ (par distributivité)

|— $(\forall x)\ [Ex \rightarrow Dx] \rightarrow (\forall x)\ [Ex \rightarrow \overline{Ax}\,]$

PTR 6 Lexique:

Ax = x est un spécialiste
Bx = x comprend l'ouvrage
Cx = x lit l'ouvrage
Dx = x prétend avoir compris l'ouvrage
Ex = x étudie l'ouvrage à fond

(1) $(\forall x)\ [Bx \rightarrow Ax]$

(2) $(\exists x)\ [Ax \wedge \overline{Cx}\,] \wedge (\exists x)\ [Ax \wedge Cx \wedge \overline{Bx}\,]$

(3) $(\exists x)\ [Ax \wedge Dx \wedge \overline{Cx}\,]$

(4) $(\forall x)\ [Bx \rightarrow Ex]$

|— $(\exists x)\ [Ax \wedge Cx \wedge \overline{Ex}\,]$

PTR 7 Lexique:

Ax = x raisonne correctement
Bx = x suit un cours de logique
Cx = x obtient de bonnes notes en logique
Dx = x est attentif en classe
Ex = x déteste son prof de philo
Fx = x est élève
Gx = x a un voisin bavard
Hx = x se passionne pour la logique

(1) $(\exists x)\ [Ax \wedge \overline{Bx}\,] \wedge (\exists x)\ [Bx \wedge \overline{Ax}\,]$

(2) $(\forall x)\ [Cx \rightarrow (Dx \wedge \overline{Ex}\,)]$

(3) $(\forall x)\ \{[Fx \wedge (Ex \vee Gx)] \rightarrow (\overline{Dx} \vee Hx)\}$

|— $\overline{(\forall x)\left[\overline{Ax} \rightarrow (Fx \wedge Ex)\right]}$

PTR 8 Lexique: univers du discours: x = élève

Ax = x travaille tard
Bx = x est fatigué
Cx = x obtient de bons résultats à l'examen
Dx = x jouit d'une bonne santé
Ex = x sort le soir

(1) $(\exists x)\ [Ax \wedge \overline{Bx}\,]$
(2) $(\forall x)\ [(Cx \vee Dx) \rightarrow \overline{Bx}\,]$
(3) $(\exists x)\ [Ex \vee \overline{Dx}\,]$
$\vdash$ $(\forall x)\ [Cx \rightarrow Ex]$

PTR 9 Lexique: Ax = x est homme politique

Bx = x réussit
Cx = x est fiable
Dx = x fait des promesses démagogiques
Ex = x se prête au dialogue
Fx = x respecte les électeurs

(1) $(\exists x)\ [Ax \wedge Bx \wedge \overline{Cx}\,]$
(2) $(\forall x)\ [Bx \rightarrow Dx]$
(3) $(\forall x)\ \{Ax \rightarrow [Cx \rightarrow (\overline{Dx} \vee \overline{Ex})]\}$
$\Leftrightarrow\ (\forall x)\ [(Ax \wedge Cx) \rightarrow (\overline{Dx} \vee \overline{Ex})]$
(4) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow Ex]$
(5) $\overline{(\forall x)[Dx \rightarrow Fx]}$
(6) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow (\overline{Ex} \vee Fx)]$
$\vdash$ $(\forall x)\ [(Ax \wedge Cx \wedge Ex) \rightarrow Fx] \wedge (\forall x)\ [(Ax \wedge Cx \wedge \overline{Ex}) \rightarrow \overline{Fx}\,]$

PTR 10 Lexique: Ax = x est étudiant

Bx = x apprécie Kant
Cx = x (parvient à lire) lit la CRP
Dx = x est assidu
Ex = x se décourage
Fx = x est obligé de lire la CRP

(1) $(\exists x)\ [Ax \wedge \overline{Bx}\,]$
(2) $(\forall x)\ [Bx \rightarrow Cx]$
(3) $(\forall x)\ [(Cx \wedge \overline{Ex}) \rightarrow (Ax \wedge Dx)]$
(4) $(\forall x)\ [(Ax \wedge Ex) \rightarrow (\overline{Cx} \vee Fx)]$
(5) $(\forall x)\ \{Ax \rightarrow [(Cx \rightarrow Fx) \rightarrow \overline{Bx}\,]\}$
$\vdash$ $\overline{(\forall x)[(Ax \wedge Cx) \rightarrow Bx]}$

PTR 11 Lexique: univers du discours: x = spectateur
Ax = x vient par le train
Bx = x vient en voiture
Cx = x vient de très loin
Dx = x prend l'avion
Ex = x peut faire le trajet en un jour
Fx = x passe une nuit à l'hôtel
Gx = x loge chez des gens qu'on connaît

(1) $(\exists x)\ Ax \wedge (\exists x)\ Bx$
(2) $(\forall x)\ [Dx \rightarrow Cx]$
(3) $(\forall x)\ [Bx \rightarrow \overline{Ex}\,] \wedge (\forall x)\ [Dx \rightarrow Ex)] \wedge (\exists x)\ [Ax \wedge Ex]$
(4) $(\forall x)\ [\,\overline{Ex} \rightarrow (Fx \vee Gx)]$
(5) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow \overline{Gx}\,]$
|— $(\exists x)\ [Ax \wedge Fx]$

PTR 12 Lexique: univers du discours: x = proposition
Ax = x est quelque chose dont l'existence est admise avant Kant
Bx = x est analytique
Cx = x est a priori
Dx = x est synthétique
Ex = x est a posteriori
Fx = x peut servir de fondement...

(1) $(\exists x)\ [Ax \wedge Bx \wedge Cx] \wedge (\exists x)\ [Ax \wedge Dx \wedge Ex] \wedge \overline{(\exists x)[Ax \wedge Dx \wedge Cx]}$
(2) $(\forall x)\ [(Ex \vee Bx) \rightarrow \overline{Fx}\,]$
$\Leftrightarrow\ (\forall x)\ [Ex \rightarrow \overline{Fx}\,] \wedge (\forall x)\ [Bx \rightarrow \overline{Fx}\,]$ (par distributivité)
|— $(\forall x)\ [Fx \rightarrow (Dx \wedge Cx)] \rightarrow (\forall x)\ [Fx \rightarrow \overline{Ax}\,]$

PTR 13 Lexique:

Ax = x regarde souvent la télé
Bx = x est amorphe
Cx = x est peu intéressant
Dx = x est élève
Ex = x a comme recommandation de lire des philosophes
Fx = x lit les philosophes
Gx = x suit les conseils de ses profs

(1) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow (Bx \wedge Cx)]$
(2) $(\exists x)\ [Dx \wedge \overline{Ax} \wedge Bx]$
(3) $(\exists x)\ [Dx \wedge Ax]$
(4) $(\forall x)\ [Bx \rightarrow (Ex \rightarrow \overline{Bx}]$
(5) $(\forall x)\ [Dx \rightarrow (Fx \vee \overline{Gx}]$
$\vdash$ $(\forall x)\ [(Dx \wedge \overline{Bx}) \leftrightarrow (\overline{Ax} \vee Fx)]$

PTR 14 Lexique:

univers du discours: x = habitant de la ville
Ax = x est vieux (= passe pour vieux)
Bx = x est pourchassé par de jeunes féroces
Cx = x a plus de 40 ans
Dx = x tombe aux mains de…
Ex = x trouve la mort
Fx = x court vite
Gx = x est poursuivi par la malchance (= le sort s'acharne contre x)
j = Jean

(1) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow Bx]$
(2) $(\forall x)\ [Cx \rightarrow Ax]$
(3) $(\exists x)\ [(Ax \wedge Bx) \rightarrow (Dx \wedge Ex)] \wedge (\exists x)\ [Ax \wedge Bx \wedge \overline{Dx}]$
(4) Cj
(5) $Fj \rightarrow (\overline{Dj} \vee Gj)$
(6) Gj
$\vdash$ $Bj \rightarrow [(\overline{Fj} \vee Gj) \rightarrow Ej]$

PTR 15 Lexique:

Ax = x est élève de 1[ère]
Bx = x est membre de l'association
Cx = x est élève de la section touristique
Dx = x échoue à l'examen
Ex = x se prépare en logique

(1) $(\exists x)\ [Ax \wedge \overline{Bx}]$
(2) $(\forall x)\ [\overline{Bx} \rightarrow Cx]$
(3) $(\forall x)\ [\overline{Dx} \vee (Bx \vee \overline{Ex})]$
(4) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow (Ex \rightarrow \overline{Cx}]$
$\vdash$ $(\exists x)\ [Ax \wedge Ex \wedge Bx \wedge \overline{Dx}] \wedge (\forall x)\ [Cx \rightarrow \overline{Dx}]$

PTR 16 Lexique:

Ax = x est un homme
Bx = x est un primate
Cx = x a des poils
Dx = x est répertorié
Ex = x est un mammifère

(1) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow Bx]$
(2) $(\exists x)\ [Bx \wedge \overline{Cx}] \rightarrow (\forall x)\ [Dx \rightarrow \overline{Bx}]$
(3) $(\forall x)\ [(Ex \wedge Dx) \rightarrow Ax]$
$\vdash$ $(\forall x)\ [(Ax \wedge \overline{Cx}) \rightarrow (Ex \rightarrow \overline{Dx})]$

PTR 17 Lexique:

univers du discours: x = candidat
Ax = x est déçu
Bx = x est reçu
Cx = x a des connaissances
Dx = x est un bon orateur

(1) $(\forall x)\ [Ax \vee Bx]$
(2) $(\forall x)\ [Bx \rightarrow Cx)]$
(3) $(\exists x)\ [\overline{Cx} \wedge Dx]$
$\vdash$ $(\exists x)\ [Dx \wedge Ax]$

PTR 18 Lexique:

Ax = x est une modification qui diminue les chances…[96]
Bx = x est l'œuvre d'un sadique
Cx = x est l'œuvre d'un incompétent
Dx = x sert les intérêts des pilotes
Ex = x est condamnable
Fx = x est ingénieur
Gx = x sert son patron
Hx = x est compétent

(1) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow (Bx \vee Cx)]$
(2) $(\forall x)\ [(Bx \vee Cx) \rightarrow \overline{Dx}\,]$
(3) $(\forall x)\ [Bx \rightarrow Ex]$
(4) $(\forall x)\ [\ Fx \rightarrow (Gx \leftrightarrow Dx)]$
(5) $(\forall x)\ [Gx \rightarrow Hx]$
(6) $(\exists x)\ [Fx \wedge \overline{Dx}\,]$
|— $(\exists x)\ [Fx \wedge \overline{Gx}\,)] \vee (\exists x)\ [Fx \wedge \overline{Hx}\,]$

PTR 19 Lexique:

Ax = x est un requin
Bx = x est sûr d'être bien équipé
Cx = x est un poisson
Dx = x sait danser le menuet
Ex = x est digne de mépris
Fx = x a trois rangées de dents
Gx = x est gentil envers les enfants
Hx = x est corpulent

(1) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow Bx]$
(2) $(\forall x)\ [(Cx \wedge \overline{Dx}\,) \rightarrow Ex]$
(3) $(\forall x)\ [Cx \rightarrow (\overline{Fx} \rightarrow \overline{Bx}\,)]$
(4) $(\forall x)\ [\ Cx \rightarrow (Ax \rightarrow \overline{Gx}\,)] \wedge (\forall x)\ [Cx \rightarrow (\overline{Ax} \rightarrow Gx)]$
$\Leftrightarrow \quad (\forall x)\ [Cx \rightarrow (Ax \leftrightarrow \overline{Gx}\,)]$
(5) $(\forall x)\ [(Cx \wedge Hx) \rightarrow \overline{Dx}\,]$
|— $(\forall x)\ [(Cx \wedge Fx) \rightarrow \overline{Ex}\,]$

[96] Une double symbolisation (A = être une modification / B = diminuer les chances…) est inutile puisque les deux prédicats ne reviennent pas séparément dans la suite du raisonnement.

PTR 20 Lexique:

Ax = x est un cambrioleur
Bx = x est gaucher
Cx = x est contrôlé
Dx = x est invité
o = Olivier

(1) $(\forall x)\ [Cx \rightarrow (Ax \wedge \overline{Bx})]$
(2) $(\forall x)\ [(Dx \wedge Cx) \rightarrow Bx] \vee \overline{(\exists x)[Cx \wedge \overline{Bx} \wedge \overline{Dx}]}$
(3) $Co \wedge \overline{Do} \wedge \overline{Bo}$
|— $(\forall x)\ [(Dx \wedge Ax) \rightarrow Bx]$

PTR 21 Lexique:

univers du discours: x = être / animal
Ax = x sait nager
Bx = x vit dans l'eau
Cx = x est un quadrupède
Dx =x vit sur la terre ferme
Ex = x a des branchies

(1) $(\forall x)\ [Bx \rightarrow Ax]$
(2) $(\forall x)\ [C\,x \rightarrow (Bx \vee Dx)]$
(3) $(\exists x)\ [Cx \wedge \overline{Ax}]$
(4) $(\forall x)\ [Ex \rightarrow \overline{Dx}]$
|— $(\exists x)\ [\overline{Ex}]$

PTR 22 Lexique:

Ax = x est lycéen
Bx = x est bon musicien
Cx = x réussit au concours musical
Dx = x répète régulièrement
Ex = x est exceptionnellement doué
Fx = x est obligé de faire beaucoup d'exercices de logique
Gx = x prépare l'examen de fin d'études secondaires

(1) $(\exists x)\ [Ax \wedge Bx]$
(2) $(\forall x)\ [Cx \rightarrow (Dx \vee Ex]$
(3) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow (Fx \rightarrow \overline{Dx})]$
(4) $(\exists x)\ [Ax \wedge (Gx \rightarrow Fx)]$
|— $(\exists x)\ [Ax \wedge (Gx \rightarrow \overline{Cx})]$

PTR 23 Lexique: univers du discours: x = proposition

Ax = x est synthétique
Bx = x est analytique
Cx = x est a priori
Dx = x est a posteriori
Ex = x dépend de l'expérience sensible
Fx = x est une connaissance authentique

(1) $(\forall x)\,[\overline{Ax \wedge Bx}\,] \wedge (\forall x)\,[\overline{Cx \wedge Dx}\,]$

$\Leftrightarrow \quad (\forall x)\,[Ax \rightarrow \overline{Bx}\,] \wedge (\forall x)\,[Cx \rightarrow \overline{Dx}\,]$

(2) $(\forall x)\,[Dx \rightarrow Ex] \wedge (\forall x)\,[Cx \rightarrow \overline{Ex}\,]$ [97]

(3) $(\forall x)\,[Fx \rightarrow Ax]$

(4) $\overline{(\forall x)[Cx \rightarrow Bx]}$

$\vdash$ $(\exists x)\,[\overline{Ex} \wedge Fx]$

PTR 24 Lexique: univers du discours: x = athlète

Ax = x remporte une victoire
Bx = x s'entraîne régulièrement
Cx = x est en bonne santé
Dx = x aime le sport
Ex = x est aimé du public
Fx = x a une grande force physique

(1) $(\forall x)\,[\overline{Ax} \vee Bx]$

(2) $(\forall x)\,[Bx \rightarrow (Cx \wedge Dx)]$

(3) $(\exists x)\,[Ax \rightarrow Ex]$

(4) $(\forall x)\,[Ax \leftrightarrow (Bx \wedge Fx)]$

$\vdash$ $\overline{(\forall x)\left[(Fx \wedge Bx) \rightarrow \overline{Ex}\right]}$

[97] On admettra aussi $\leftrightarrow$ pour deux [CNS].

PTR 25 Lexique: univers du discours: x = jeune

Ax = x est respecté par ses copains
Bx = x maîtrise le skateboard
Cx = x possède une Playstation
Dx = x prétend maîtriser le skateboard
Ex = x apporte des preuves
Fx = x est enseignant
Gx = x s'intéresse aux jeunes
Hx = x risque de rencontrer des jeunes
Ix = x ne fréquente que certains quartiers de la ville
Kx = x rencontre des révoltés

(1) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow (Bx \vee Cx)]$
(2) $(\forall x)\ [Dx \rightarrow Ex]$
(3) $(\exists x)\ [\overline{Bx} \wedge Dx]$;
(4) $(\forall x)\ [Fx \rightarrow Gx]$
(5) $(\forall x)\ [Gx \rightarrow (Hx \vee Ix)]$
|— $(\forall x)\ \overline{Bx} \rightarrow (\exists x)\ [Fx \wedge Kx]$

PTR 26 Lexique: Ax = x aime la musique

Bx = x écoute Mozart
Cx = x écoute du Rap
Dx = x joue au Game-Boy
Ex = x danse

(1) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow \overline{Bx \wedge \overline{Cx}}]$
(2) $\overline{(\forall x)[Ax \rightarrow Dx]} \wedge (\forall x)\ [Cx \rightarrow (Ex \wedge Dx)]$
(3) $(\forall x)\ [(\overline{Cx} \wedge \overline{Ex}) \rightarrow Bx]$
|— $(\exists x)\ Ex$

PTR 27 Lexique:

Ax = x est joueur de l'équipe nationale
Bx = x manque de condition physique
Cx = x est trop âgé
Dx = x est capable de jouer comme Zidane
Ex = x peut nous faire gagner un match
Fx = x est français ou italien[98]

(1) $(\exists x)[Ax \wedge Bx] \wedge (\exists x)[Ax \wedge Cx] \wedge (\forall x)[Ax \rightarrow \overline{Dx}]$
(2) $(\forall x)[(Bx \vee Cx) \rightarrow \overline{Ex}]$
$\Leftrightarrow$ $(\forall x)[Bx \rightarrow \overline{Ex}] \wedge (\forall x)[Cx \rightarrow \overline{Ex}]$
(3) $(\forall x)[Ex \rightarrow Dx] \wedge (\forall x)[Dx \rightarrow Fx]$
$\vdash$ $(\forall x)[Dx \rightarrow \overline{Ax}]$

PTR 28 Lexique:

Ax = x est un philosophe
Bx = x est un poète
Cx = x peut nous émouvoir
Dx = x est un joueur de football
Ex = x est un penseur sérieux

(1) $\{(\forall x)[\overline{Bx} \rightarrow Ax] \wedge (\forall x)[Cx \rightarrow Bx]\} \rightarrow \overline{(\exists x)[Ax \wedge Cx]}$
(2) $(\exists x)[Dx \wedge Cx] \rightarrow \overline{(\forall x)[Dx \rightarrow Ax]}$
$\vdash$ $\{(\forall x)[Ex \rightarrow Ax] \wedge (\exists x)[Dx \wedge \overline{Ax}]\} \rightarrow (\exists x)[Dx \wedge Bx \wedge \overline{Ex}]$

PTR 29 Lexique:

Ax = x est alpiniste
Bx = x connaît les dangers du monde alpin
Cx = x est prudent
Dx = x est capable de participer à un débat philosophique
Ex = x fait l'ascension du mont Everest
m = Messner

(1) $(\forall x)[Ax \rightarrow (Bx \rightarrow Cx)]$
(2) $(\forall x)[Ax \rightarrow Dx]$
(3) Em
(4) $(\forall x)[Ax \rightarrow (Dx \rightarrow Bx)]$;
(5) $(\forall x)[Ex \rightarrow Ax]$
$\vdash$ Cm

---

[98] Ici encore une double symbolisation (français / italien) est inutile.

PTR 30 Lexique:

Ax = x est politicien
Bx = x est corrompu
Cx = x est élu
Dx = x est cardiaque
d = Dupont

(1) $(\forall x)\,[Cx \rightarrow (Ax \wedge \overline{Bx})]$
(2) $(\forall x)\,[(Dx \wedge Cx) \rightarrow Bx] \wedge \overline{(\exists x)[Dx \wedge \overline{Cx} \wedge \overline{Bx}]}$
(3) $Cd \wedge \overline{Dd} \wedge \overline{Bd}$
|— $(\forall x)\,[(Ax \wedge Dx) \rightarrow Bx]$

PTR 31 Lexique:

Ax = x est Français
Bx = x est hostile à la guerre en Irak[99]
Cx = x est favorable à la guerre en Irak
Dx = x est un philosophe
Ex = x est un philosophe authentique
Fx = x s'oppose à toute guerre
Gx = x est obligé de se défendre contre une agression venant de l'extérieur

(1) $\overline{(\forall x)[Ax \rightarrow Bx]} \wedge (\exists x)\,[Ax \wedge Cx] \wedge (\exists x)\,[Ax \wedge Cx \wedge Dx]$
(2) $(\forall x)\,[(Ex \rightarrow (Fx \vee Gx)]$
(3) $(\forall x)\overline{[Fx \rightarrow Ex]}$
(4) $(\forall x)\,[(Dx \wedge Ax) \rightarrow \overline{Gx}]$
|— $(\exists x)\,[Ax \wedge Dx \wedge \overline{Ex}]$

PTR 32 Lexique:

Ax = x comprend la logique
Bx = x (peut faire) fait des déductions
Cx = x raisonne
Dx = x écrit des poèmes
Ex = x est élève de première
Fx = x fait beaucoup d'exercices de logique

(1) $(\forall x)\,[Bx \rightarrow Ax]$
(2) $(\forall x)\,[Cx \rightarrow (Bx \vee Dx)]$
(3) $(\exists x)\,[Ex \wedge Cx \wedge \overline{Ax}]$
(4) $(\forall x)\,[Fx \rightarrow \overline{Dx}]$
|— $(\exists x)\,[Ex \wedge \overline{Fx}]$

---

[99] On admettra aussi «ne pas être favorable» et le lexique changera en conséquence.

PTR 33 Lexique:

Ax = x aime les films de Fellini
Bx = x est excentrique
Cx = x aime les films avec J.C. Van Damme
Dx = x est intelligent
Ex = x aime regarder la TV

(1) $(\exists x)\ [Ax \wedge Bx] \wedge (\forall x)\ [Ax \rightarrow \overline{Cx}]$
(2) $(\forall x)\ [(Bx \vee Dx) \vee Ex] \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)\ [Bx \vee Dx \vee Ex]$
|— $(\forall x)\ [Ex \rightarrow Cx] \rightarrow (\forall x)\ [Ax \rightarrow \overline{Ex}]$

PTR 34 Lexique:

univers du discours: x = élève
Ax = x (peut choisir) choisit le métier d'enseignant
Bx = x décroche le certificat d'études
Cx = x comprend les lois logiques
Dx = x apprend les lois logiques
Ex = x travaille assidûment
s = Serge

(1) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow Bx] \wedge (\forall x)\ [Bx \rightarrow (Cx \wedge Dx]$
(2) $(\forall x)\ [Dx \rightarrow Ex]$
(3) $(\exists x)\ [Dx \wedge \overline{Cx}]$
(4) $Ds \wedge \overline{Cs}$
|— $\overline{As}$

PTR 35 Lexique:

Ax = x est candidat
Bx = x se soumet à un test …
Cx = x accède au poste
Dx = x fait preuve d'esprit conservateur
Ex = x a trop d'imagination
Fx = x dessine des arbres luxuriants
Gx = x dessine des monstres[100]
Hx = x fait des dessins imaginatifs

(1) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow Bx]$
(2) $(\forall x)\ [Cx \rightarrow (Dx \rightarrow \overline{Ex})]$
(3) $(\exists x)\ [(Ax \wedge Fx \wedge Gx) \wedge Ex]$
(4) $(\forall x)\ [Ex \rightarrow \overline{Dx}]$
|— $(\forall x)\ [(Ax \wedge Hx) \rightarrow \overline{Cx}]$

---

[100] F et G pourraient très bien former une seule proposition.

PTR 36 Lexique:

Ax = x est démocrate
Bx = x est libéral
Cx = x refuse la séparation des pouvoirs
Dx = x est en faveur du despotisme

(1) $(\exists x)\ [Ax \wedge \overline{Bx}] \wedge (\exists x)\ [Bx \wedge \overline{Ax}]$
(2) $(\forall x)\ [Cx \rightarrow \overline{Bx}]$
(3) $(\exists x)\ [Ax \wedge \overline{Cx}]$
(4) $(\forall x)\ [\overline{Cx} \rightarrow \overline{Dx}]$
$\vdash$ $(\exists x)\ [Ax \wedge \overline{Bx} \wedge \overline{Dx}]$

PTR 37 Lexique:

Ax = x pense
Bx = x a un cerveau
Cx = x est un cerveau
Dx = x est une multitude (un ensemble) de cellules
Ex = x est un organisme
Fx = x est multicellulaire[101]
Gx = x est pluricellulaire
Hx = x est unicellulaire
Jx = x est une bactérie

(1) $(\forall x)\ [Ax \rightarrow Bx]$
(2) $(\forall x)\ [Cx \rightarrow Dx]$
(3) $(\exists x)\ [Ex \wedge Fx] \wedge (\exists x)\ [Ex \wedge Gx] \wedge (\exists x)\ [Ex \wedge Hx]$
(4) $(\forall x)\ [Jx \rightarrow Hx]$
$\vdash$ $(\forall x)\ \{Jx \rightarrow [\overline{Ax} \vee (Bx \wedge \overline{Dx}]]\}$

PTR 38 Lexique:

Ax = x est un imbécile
Bx = x est un optimiste (n'est pas pessimiste)
Cx = x réfléchit au sens de la vie
Dx = x est heureux (n'est pas triste)

(1) $(\exists x)\ [Ax \wedge Bx] \wedge (\exists x)\ [Ax \wedge \overline{Bx}]$
(2) $(\forall x)\ [\overline{Ax} \rightarrow Cx]$
(3) $(\forall x)\ [\overline{Cx \wedge Bx}]$
(4) $(\exists x)\ [Cx \wedge \overline{Dx}]$
$\vdash$ $(\forall x)\ [Bx \rightarrow (Ax \wedge Dx)] \wedge (\forall x)\ [\overline{Bx} \rightarrow (Ax \wedge \overline{Dx})]$

---

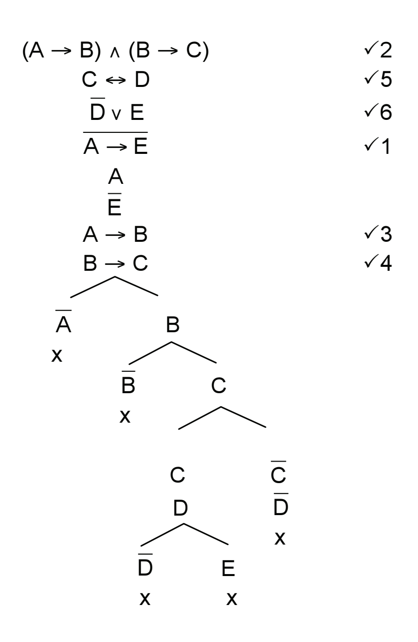
[101] On voit que Fx et Gx sont identiques. Mais le texte fait une différence entre les deux.

3.4 ARBRES

3.4.1 Propositions

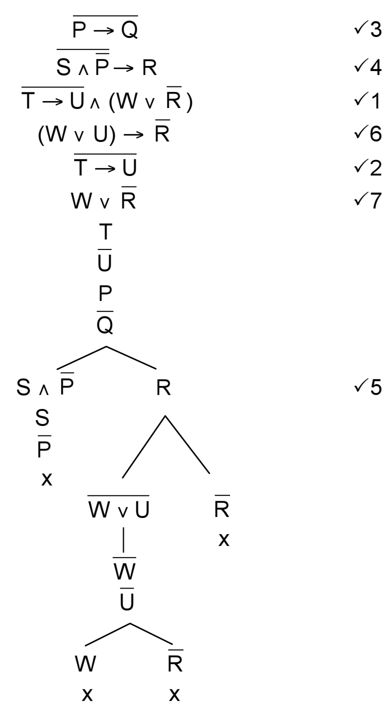
Toutes les applications ne seront pas résolues. Seront présentés uniquement les exercices depuis l'an 2000. Pour la résolution des autres exercices on s'orientera utilement à l'indication de la validité ou de la non-validité qui est donnée pour chacun.

MA 23



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

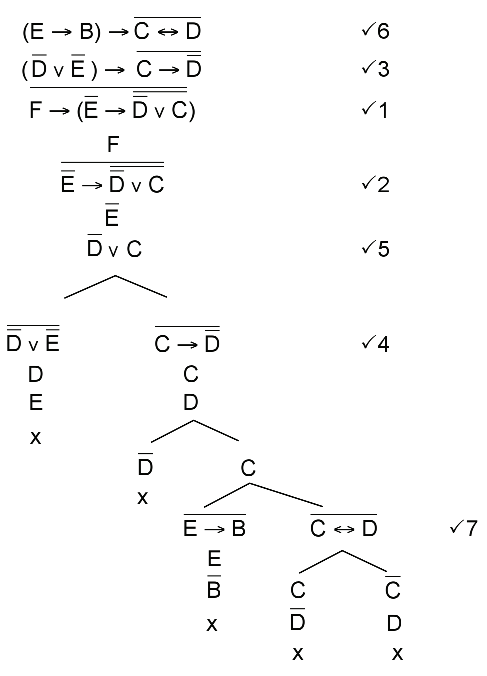
MA 24



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

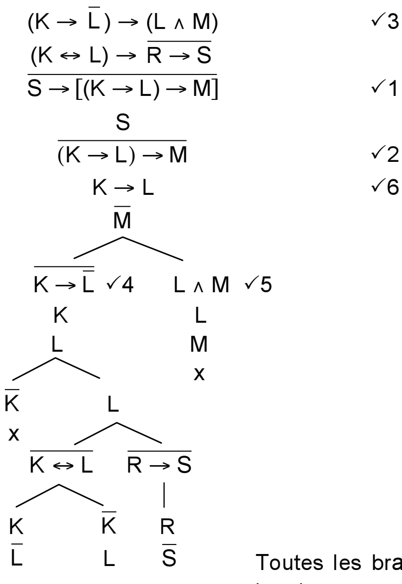
MA 25





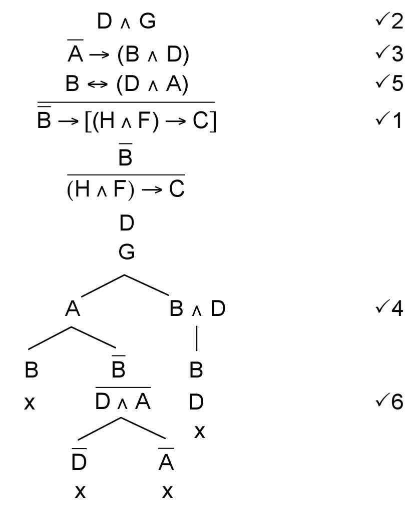
Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

MA 26



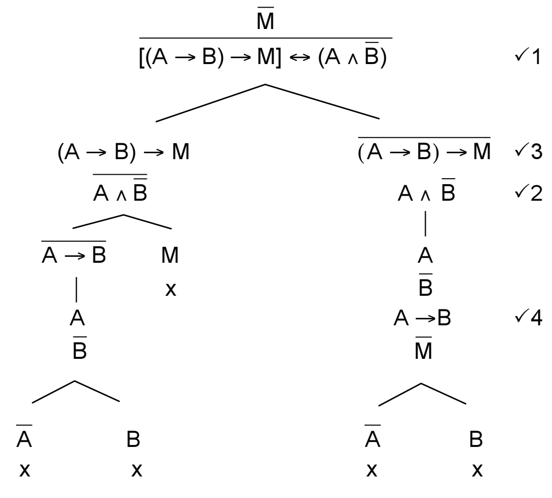
Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

MA 27



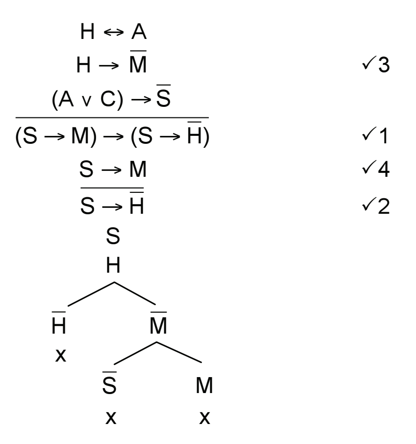
Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

MA 28



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

MA 29



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

MA 30

$(A \vee B) \rightarrow [(C \vee E) \rightarrow (F \wedge D)]$ ✓5
$(D \vee G) \rightarrow L$ ✓3
$\overline{A \rightarrow (\overline{C} \vee L)}$ ✓1
A
$\overline{\overline{C} \vee L}$ ✓2
C
$\overline{L}$

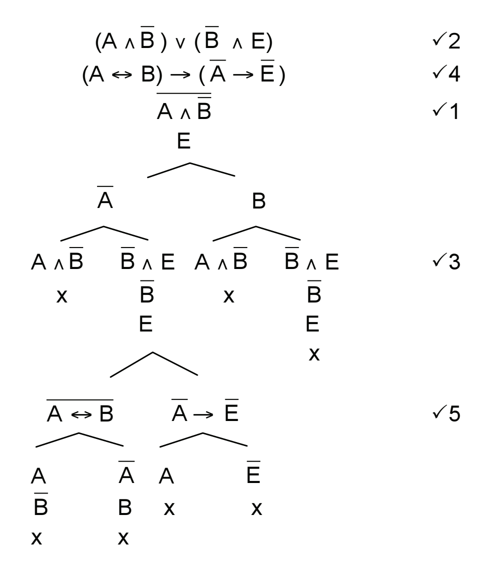
Branche 1 : $\overline{D \vee G}$ ✓4 ; $\overline{D}$; $\overline{G}$

- Branche 1.1 : $\overline{A \vee B}$ ✓6 ; $\overline{A}$; $\overline{B}$; x
- Branche 1.2 : $(C \vee E) \rightarrow (F \wedge D)$ ✓7
  - $\overline{C \vee E}$; $\overline{C}$; $\overline{E}$; x
  - $F \wedge D$; F ; D ; x

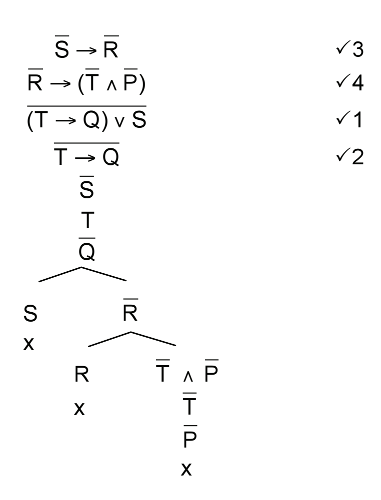
Branche 2 : L ; x

Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

MA 31

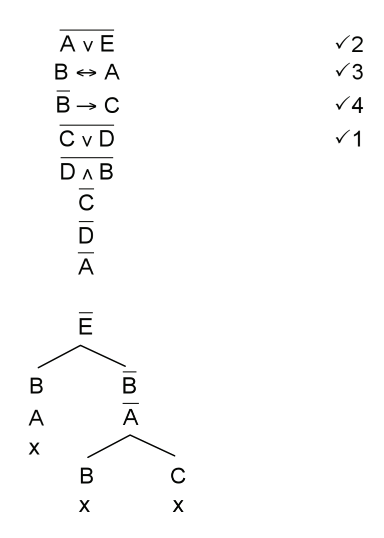


MA 32



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

MA 33



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

MA 34

$(P \to Q) \to [\overline{R} \to \overline{\overline{S} \wedge \overline{T}}]$ ✓4

$\overline{(R \to P) \to [\overline{T} \to (\overline{S} \to P)]}$ ✓1

$R \to P$ ✓7

$\overline{\overline{T} \to (\overline{S} \to P)}$ ✓2

$\overline{T}$

$\overline{\overline{S} \to P}$ ✓3

$\overline{S}$

$\overline{P}$

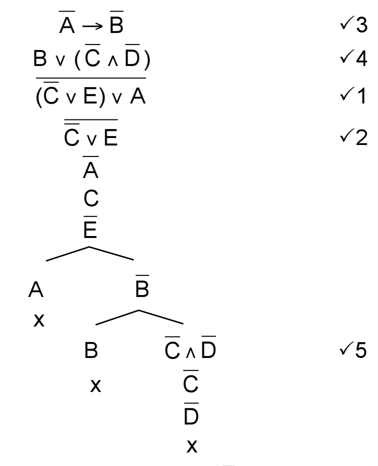
Branche 1 : $\overline{P \to Q}$; P ; $\overline{Q}$; x

Branche 2 : $\overline{R} \to \overline{\overline{S} \wedge \overline{T}}$ ✓5

- R
  - $\overline{R}$; x
  - P ; x
- $\overline{\overline{S} \wedge \overline{T}}$ ✓6
  - S ; x
  - T ; x

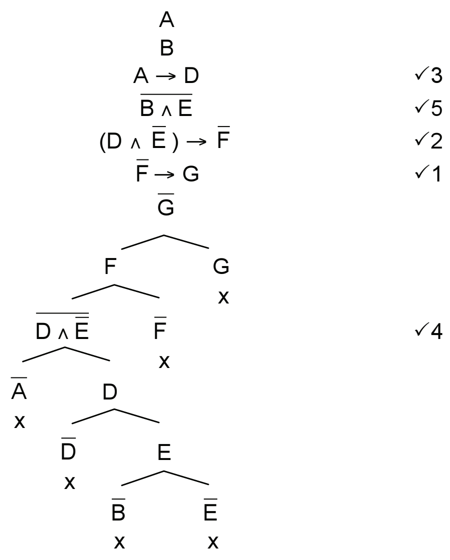
Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

MA 35



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

MA 36



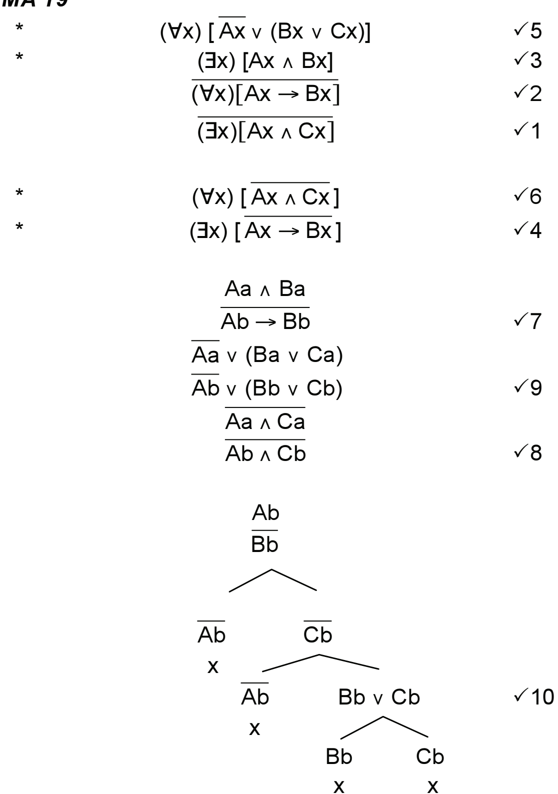
Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

3.4.2 Prédicats

Toutes les applications ne seront pas résolues. Seront présentés uniquement les exercices depuis 1996 comportant **deux ou plusieurs spécifications d'existentielles**! Ces résolutions essaient d'être les plus simples possibles, ce qui explique que parfois on commencera par **b** au lieu de **a** qui ne fermerait pas.

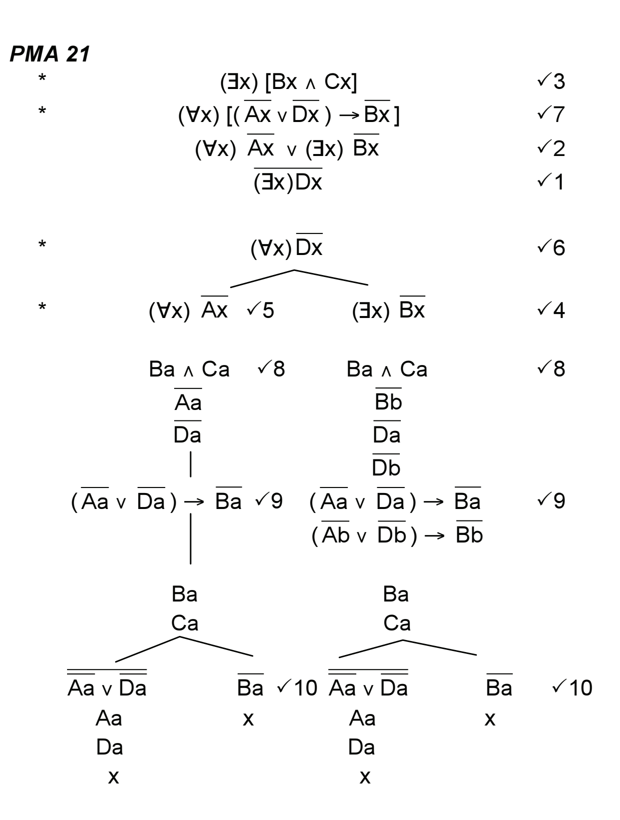
Nous allons nous en tenir au «modus operandi» utilisé pour les exercices commentés en suivant les trois étapes de la *transformation*, *modélisation* et *vérification*. En pratique on peut très bien raccourcir la démarche (p.ex. lorsqu'on remarque que certaines prémisses n'auront pas besoin d'être modélisées parce qu'elles sont contradictoires).

PMA 19



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

PMA 21



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

PMA 23

* $(\exists x)\,[Ax]$ ✓5

$(\exists x)\,[Ax] \rightarrow \overline{(\exists x)Bx}$ ✓2

* $(\forall x)\,[\overline{Bx} \rightarrow (Cx \rightarrow Dx)]$ ✓7

$\overline{(\forall x)[Cx \rightarrow Dx]}$ ✓1

* $(\exists x)\overline{[Cx \rightarrow Dx]}$ ✓6

Branche gauche :

$\overline{(\exists x)Ax}$ ✓3

* $(\forall x)\overline{Ax}$ ✓8

Aa

$\overline{Cb \rightarrow Db}$

$\overline{Ba} \rightarrow (Ca \rightarrow Da)$

$\overline{Bb} \rightarrow (Cb \rightarrow Db)$

$\overline{Aa}$

$\overline{Ab}$

x

Branche droite :

$\overline{(\exists x)Bx}$ ✓4

$(\forall x)\overline{Bx}$ ✓9

Aa

$\overline{Cb \rightarrow Db}$

$\overline{Ba} \rightarrow (Ca \rightarrow Da)$

$\overline{Bb} \rightarrow (Cb \rightarrow Db)$ ✓10

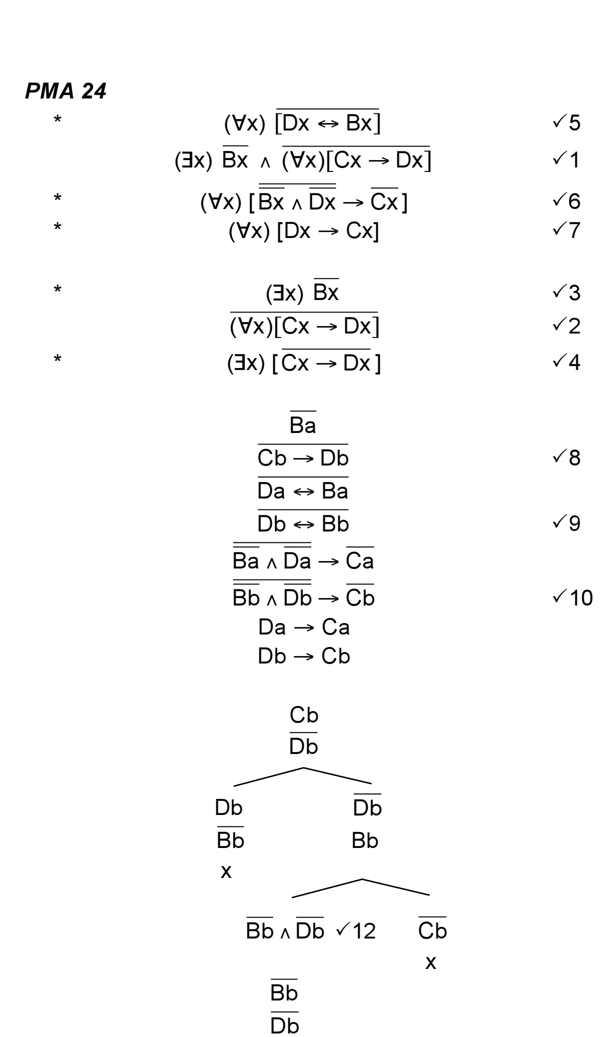
$\overline{Ba}$

$\overline{Bb}$

Bb	$Cb \rightarrow Db$
x	x

Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

PMA 24



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

PMA 26

$(\forall x)\,[Ax \rightarrow Bx] \vee \overline{(\forall x)Cx}$ ✓3

$\overline{(\exists x)Bx}$ ✓1

$\overline{(\forall x)[Ax \rightarrow \overline{Cx}]}$ ✓2

* $(\forall x)\,\overline{Bx}$ ✓7

* $(\exists x)\,[\overline{Ax \rightarrow \overline{Cx}}]$ ✓5

Branche gauche:

* $(\forall x)\,[Ax \rightarrow Bx]$ ✓8

$\overline{Aa \rightarrow \overline{Ca}}$ ✓9

$\overline{Ba}$

$Aa \rightarrow Ba$ ✓11

Aa

Ca

$\overline{Aa}$	Ba
x	x

Branche droite:

$\overline{(\forall x)Cx}$ ✓4

* $(\exists x)\,\overline{Cx}$ ✓6

$\overline{Aa \rightarrow \overline{Ca}}$ ✓10

$\overline{Cb}$

$\overline{Ba}$

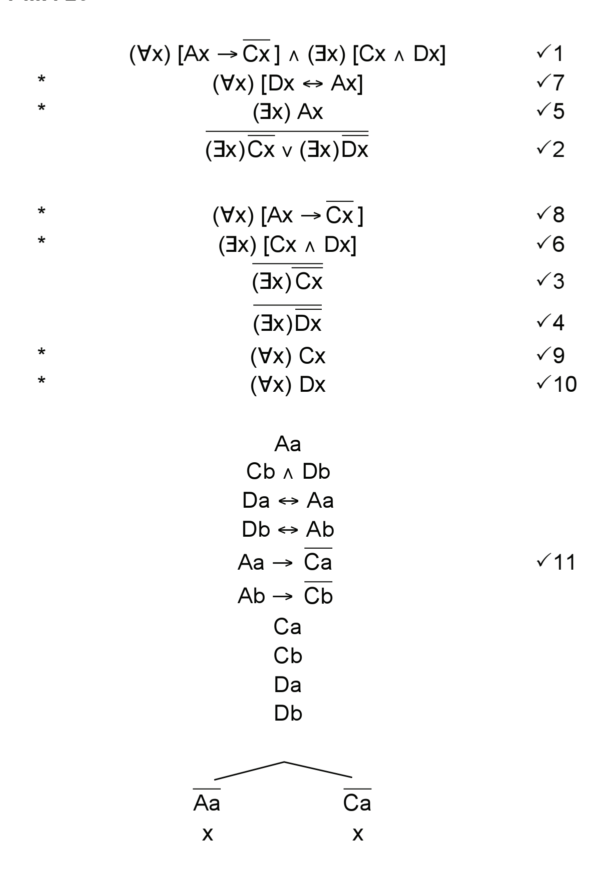
$\overline{Bb}$

Aa

Ca

Toutes les branches ne sont pas clôturées, le raisonnement n'est pas valide.

PMA 29



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

PMA 30

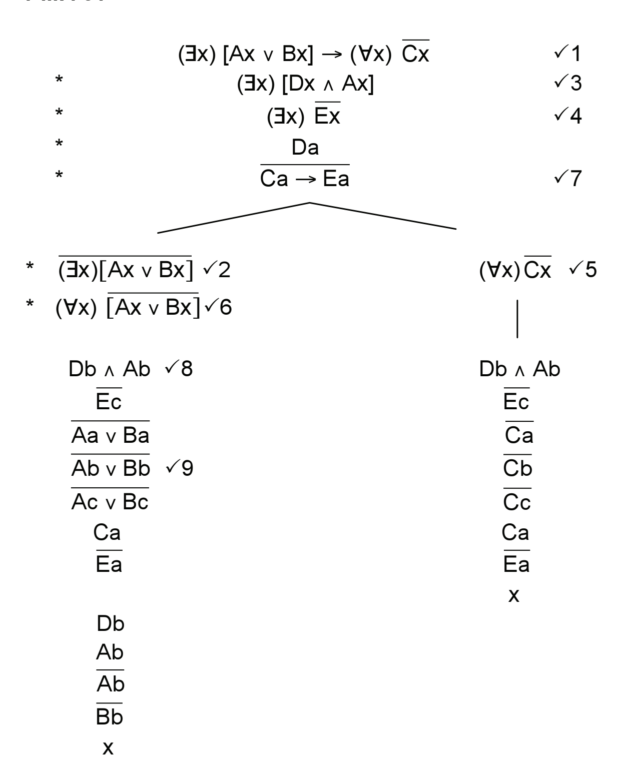
*	$(\exists x)\ [\overline{Ax \rightarrow Dx}]$	✓2
*	$(\forall x)\ [(Ax \wedge Bx) \rightarrow Cx]$	✓4
*	$(\forall x)\ [\overline{Bx} \rightarrow \overline{\overline{Cx} \wedge \overline{Ex}}]$	✓5
*	$(\exists x)\ [\overline{Cx} \wedge \overline{Ex}]$	✓3
*	$(\forall x)\ [\overline{Bx} \wedge Fx]$	✓6
	$\overline{(\exists x)[Ex \vee Dx]}$	✓1
*	$(\forall x)\ [\overline{Ex \vee Dx}]$	✓7
	$\overline{Aa \rightarrow Da}$	
	$\overline{Cb} \wedge \overline{Eb}$	✓8
	$(Aa \wedge Ba) \rightarrow Ca$	
	$(Ab \wedge Bb) \rightarrow Cb$	
	$\overline{Ba} \rightarrow \overline{\overline{Ca} \wedge \overline{Ea}}$	
	$\overline{Bb} \rightarrow \overline{\overline{Cb} \wedge \overline{Eb}}$	✓10
	$\overline{Ba} \wedge Fa$	
	$\overline{Bb} \wedge Fb$	✓9
	$\overline{Ea \vee Da}$	
	$\overline{Eb \vee Db}$	
	$\overline{Cb}$	
	$\overline{Eb}$	
	$\overline{Bb}$	
	Fb	

Branches:

- Bb
  - x
- $\overline{\overline{Cb} \wedge \overline{Eb}}$
  - Cb
    - x
  - Eb
    - x

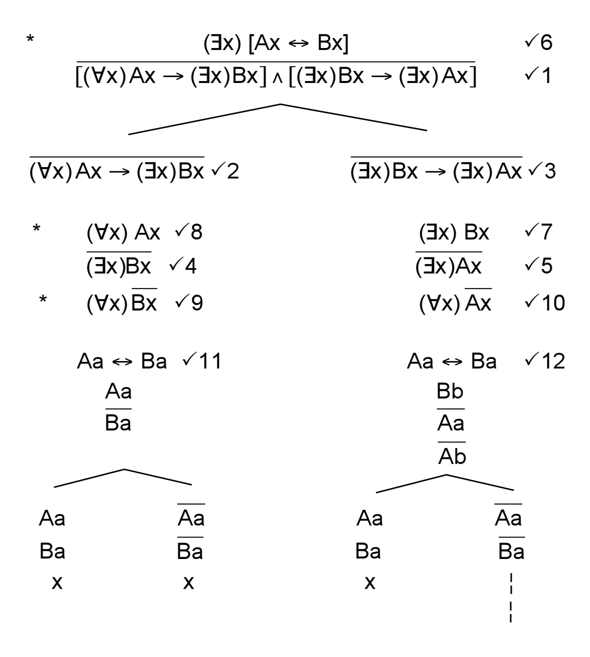
Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

PMA 31



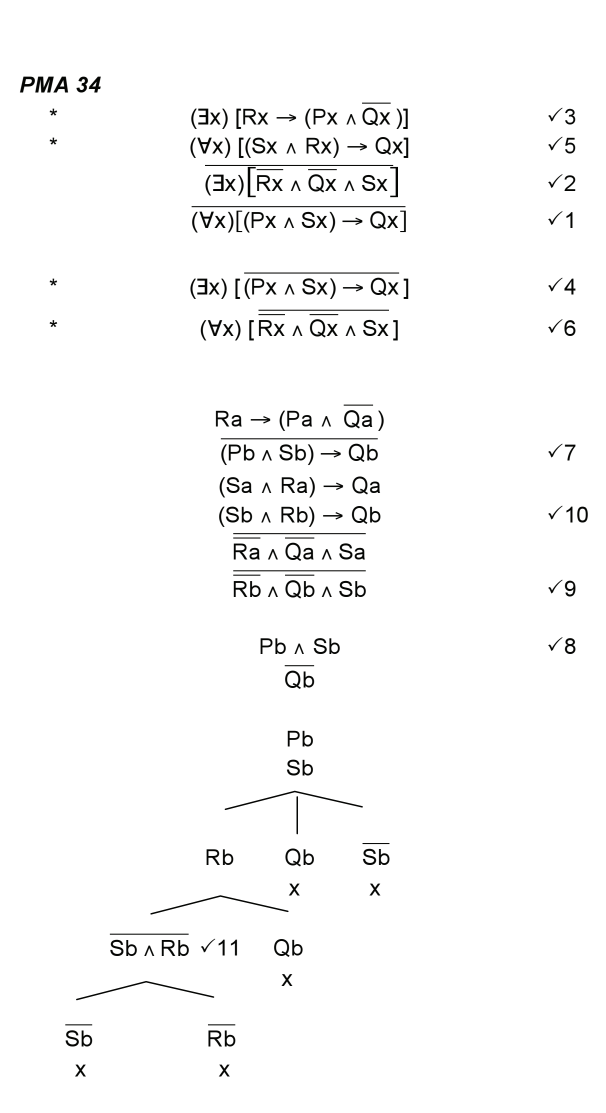
Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

PMA 32

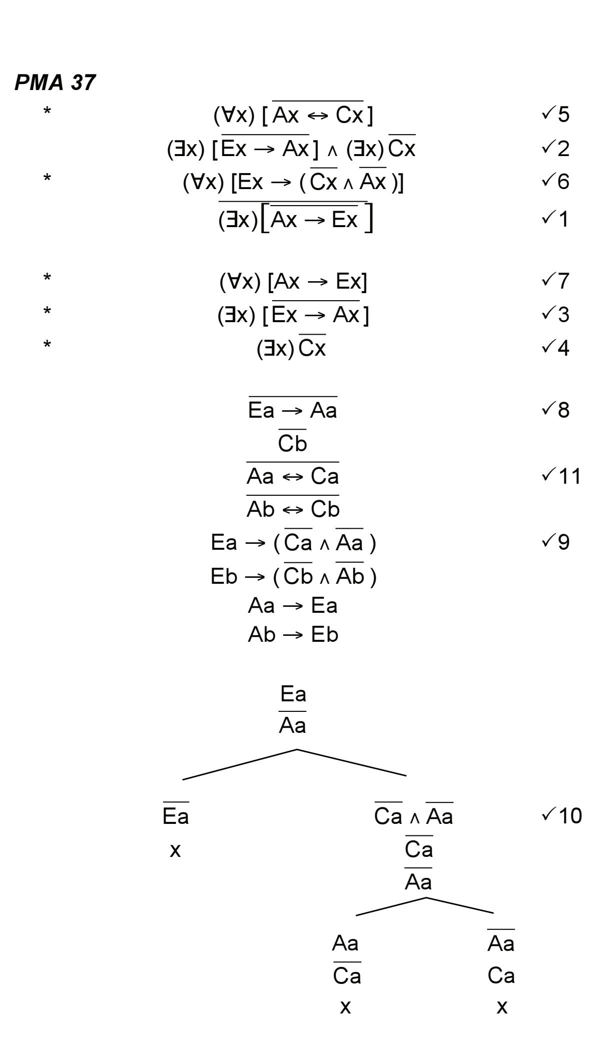


Toutes les branches ne sont pas clôturées, le raisonnement n'est pas valide.

PMA 34

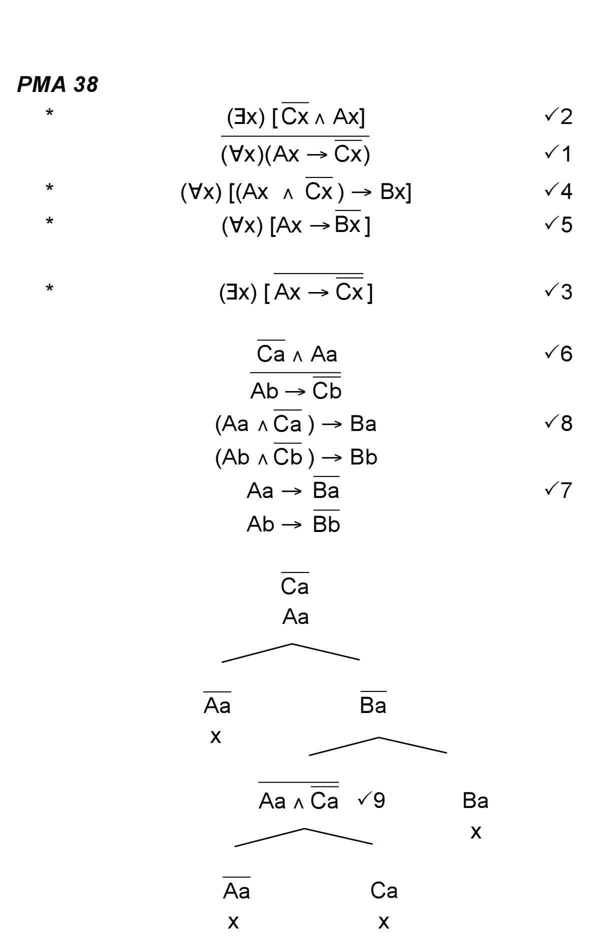


Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

PMA 38



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

PMA 41

* $(\forall x)\,[\,\overline{\overline{Ax} \wedge \overline{Bx}} \rightarrow \overline{Cx}\,]$ ✓7

$(\exists x)\ \overline{Ax} \wedge \overline{(\forall x)[Cx \rightarrow Bx]}$ ✓1

* $(\forall x)\,[\,\overline{Bx \leftrightarrow Ax}\,]$ ✓6

* $(\forall x)\,[Bx \rightarrow Cx]$ ✓5

* $(\exists x)\ \overline{Ax}$ ✓3

$\overline{(\forall x)[Cx \rightarrow Bx]}$ ✓2

* $(\exists x)\,[\,\overline{Cx \rightarrow Bx}\,]$ ✓4

$\overline{Aa}$

$\overline{Cb \rightarrow Bb}$ ✓8

$Ba \rightarrow Ca$

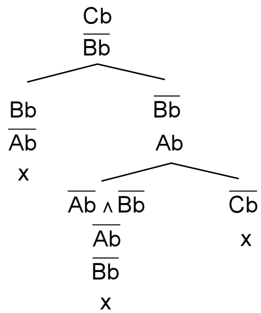
$Bb \rightarrow Cb$

$\overline{Ba \leftrightarrow Aa}$

$\overline{Bb \leftrightarrow Ab}$ ✓9

$\overline{\overline{Aa} \wedge \overline{Ba}} \rightarrow \overline{Ca}$

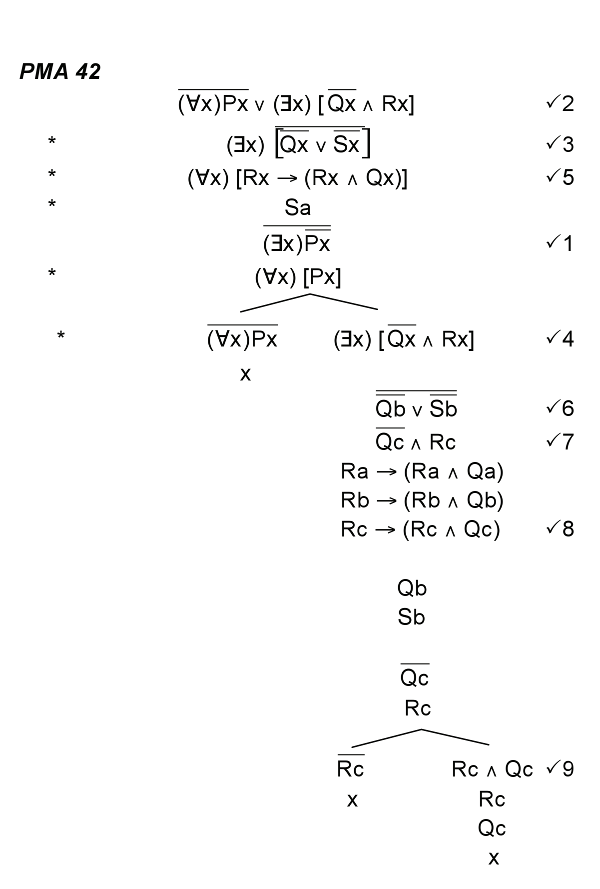
$\overline{\overline{Ab} \wedge \overline{Bb}} \rightarrow \overline{Cb}$ ✓10



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide[102].

[102] … et l'on remarquera la similitude avec PMA 24.

PMA 42



Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.



3.5 DEDUCTIONS

3.5.1 Preuve formelle simple

PS a

(1)	$E \rightarrow F$	
(2)	$\overline{E} \rightarrow D$	
(3)	$D \rightarrow R$	$\vdash F \vee R$
(4)	$\overline{F} \rightarrow \overline{E}$	Cont 1
(5)	$\overline{F} \rightarrow D$	SH 2; 4
(6)	$\overline{F} \rightarrow R$	SH 3; 5
(7)	$F \vee R$	Imp 6

PS b

(1)	$(\overline{A} \wedge \overline{B}) \rightarrow C$	
(2)	$B \rightarrow (A \vee D)$	
(3)	$\overline{A} \wedge \overline{C}$	$\vdash D$
(4)	$\overline{A}$	Simp 3
(5)	$\overline{C}$	Simp 3
(6)	$\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$	MT 1; 5
(7)	$A \vee B$	DM 6
(8)	B	SD 4; 7
(9)	$A \vee D$	MP 2; 8
(10)	D	SD 4; 9

PS c

(1)	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	
(2)	$\overline{P} \rightarrow \overline{R}$	
(3)	$S \rightarrow R$	$\vdash Q \rightarrow \overline{S}$
(4)	$P \rightarrow \overline{Q}$	Imp 1
(5)	$Q \rightarrow \overline{P}$	Cont 4
(6)	$Q \rightarrow \overline{R}$	SH 2; 5
(7)	$\overline{R} \rightarrow \overline{S}$	Cont 3
(8)	$Q \rightarrow \overline{S}$	SH 6; 7

PS d

(1)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	
(2)	$\overline{Q} \rightarrow S$	
(3)	$\overline{R} \wedge \overline{S}$	$\vdash \overline{P}$
(4)	$\overline{R}$	Simp 3
(5)	$\overline{S}$	Simp 3
(6)	Q	MT 2; 5
(7)	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	Exp 1
(8)	$\overline{P \wedge Q}$	MT 4; 7
(9)	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	DM 8
(10)	$\overline{P}$	SD 6; 9

PS e

(1)	$H \rightarrow E$	
(2)	$E \rightarrow (D \vee P)$	
(3)	$\overline{P}$	$\vdash D \vee \overline{H}$
(4)	$H \rightarrow (D \vee P)$	SH 1; 2
(5)	$\overline{H} \vee (D \vee P)$	Imp 4
(6)	$(\overline{H} \vee D) \vee P$	Ass 5
(7)	$\overline{H} \vee D$	SD 3; 6
(8)	$D \vee \overline{H}$	Com 7

PS f

(1)	$(B \rightarrow A) \wedge (D \rightarrow C)$	
(2)	$(A \vee C) \rightarrow E$	
(3)	$\overline{E}$	$\vdash \overline{B \vee D}$
(4)	$\overline{A \vee C}$	MT 2; 3
(5)	$\overline{A} \wedge \overline{C}$	DM 4
(6)	$\overline{A}$	Simp 5
(7)	$\overline{C}$	Simp 5
(8)	$B \rightarrow A$	Simp 1
(9)	$D \rightarrow C$	Simp 1
(10)	$\overline{B}$	MT 6; 8
(11)	$\overline{D}$	MT 7; 9
(12)	$\overline{B} \wedge \overline{D}$	Conj 10; 11
(13)	$\overline{B \vee D}$	DM 12

Applications

PS 1

(1)	$\overline{P \wedge Q} \vee (R \wedge S)$	
(2)	$\overline{(R \rightarrow \overline{S}) \rightarrow \overline{Q}}$	$\vdash \overline{P}$
(3)	$(R \rightarrow \overline{S}) \wedge Q$	Ne.Imp 2
(4)	$R \rightarrow \overline{S}$	Simp 3
(5)	$\overline{R \wedge S}$	Ne.Imp 4
(6)	$\overline{P \wedge Q}$	SD 1; 5
(7)	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	DM 6
(8)	Q	Simp 3
(9)	$\overline{P}$	SD 7; 8

PS 2

(1)	$A \rightarrow \overline{B \vee \overline{C}}$	
(2)	$\overline{A} \rightarrow (A \wedge D)$	
(3)	$\overline{B} \rightarrow (C \rightarrow E)$	$\vdash \overline{F} \rightarrow E$
(4)	$(\overline{A} \rightarrow A) \wedge (\overline{A} \rightarrow D)$	Dis 2
(5)	$\overline{A} \rightarrow A$	Simp 4
(6)	$A \vee A$	Imp 5
(7)	A	Taut 6
(8)	$\overline{B \vee \overline{C}}$	MP 1; 7
(9)	$\overline{B} \wedge C$	DM 8
(10)	$(\overline{B} \wedge C) \rightarrow E$	Exp 3
(11)	E	MP 9;10
(12)	$F \vee E$	Add 11, Com
(13)	$\overline{F} \rightarrow E$	Imp 12

PS 3

(1)	$\overline{P} \wedge Q$	
(2)	$(\overline{Q} \rightarrow R) \rightarrow T$	
(3)	$(T \rightarrow P) \vee \overline{U}$	
(4)	$R \rightarrow (U \wedge V)$	$\vdash \overline{R}$
(5)	$\overline{P}$	Simp 1
(6)	Q	Simp 1
(7)	$Q \vee R$	Add 6
(8)	$\overline{Q} \rightarrow R$	Imp 7
(9)	T	MP 2; 8
(10)	$\overline{T} \vee P \vee \overline{U}$	Imp 3, Ass
(11)	$P \vee \overline{U}$	SD 9; 10
(12)	$\overline{U}$	SD 5; 11
(13)	$(R \rightarrow U) \wedge (R \rightarrow V)$	Dis 4
(14)	$R \rightarrow U$	Simp 13
(15)	$\overline{R}$	MT 12; 14

PS 4

(1)	P	
(2)	Q	
(3)	$[(P \vee R) \wedge (Q \vee S)] \rightarrow [(P \wedge Q) \rightarrow (Q \rightarrow S)]$	
(4)	$(S \vee R) \rightarrow T$	$\vdash T \vee R$
(5)	$P \vee R$	Add 1
(6)	$Q \vee S$	Add 2
(7)	$P \wedge Q$	Conj 1; 2
(8)	$(P \vee R) \wedge (Q \vee S)$	Conj 5; 6
(9)	$(P \wedge Q) \rightarrow (Q \rightarrow S)$	MP 8; 3
(10)	$Q \rightarrow S$	MP 7; 9
(11)	S	MP 2; 10
(12)	$S \vee R$	Add 11
(13)	T	MP 4; 12
(14)	$T \vee R$	Add 13

PS 5

(1)	$A \leftrightarrow (B \to C)$	
(2)	$(B \wedge D) \vee \overline{B \vee D}$	
(3)	$(\overline{D \to C} \wedge D) \to C$	$\vdash$ A
(4)	$(B \wedge D) \vee (\overline{B} \wedge \overline{D})$	DM 2
(5)	$B \leftrightarrow D$	Equiv 4
(6)	$(B \to D) \wedge (D \to B)$	Equiv 5
(7)	$B \to D$	Simp 6
(8)	$(D \wedge \overline{C} \wedge D) \to C$	Ne.Imp 3, Ass
(9)	$(D \wedge \overline{C}) \to C$	Taut 8
(10)	$D \to (\overline{C} \to C)$	Exp 9
(11)	$D \to (C \vee C)$	Imp 10
(12)	$D \to C$	Taut 11
(13)	$B \to C$	SH 7; 12
(14)	$[A \to (B \to C)] \wedge [(B \to C) \to A]$	Equiv 1
(15)	$(B \to C) \to A$	Simp 14
(16)	A	MP 13; 15

PS 6

(1)	$A \to B$	
(2)	$B \to [A \to (C \vee D)]$	
(3)	$C \leftrightarrow D$	
(4)	$\overline{C \wedge D}$	$\vdash$ $\overline{A}$
(5)	$(C \wedge D) \vee (\overline{C} \wedge \overline{D})$	Equiv 3
(6)	$\overline{C} \wedge \overline{D}$	SD 4; 5
(7)	$\overline{C \vee D}$	DM 6
(8)	$(B \wedge A) \to (C \vee D)$	Exp 2
(9)	$\overline{B \wedge A}$	MT 7; 8
(10)	$B \to \overline{A}$	Ne.Imp 9
(11)	$A \to \overline{A}$	SH 1; 10
(12)	$\overline{A} \vee \overline{A}$	Imp 11
(13)	$\overline{A}$	Taut 12

PS 7

(1)	$(\overline{P} \vee Q) \wedge U$	
(2)	$Q \to (R \wedge S)$	
(3)	$U \to \overline{\overline{S} \to T}$	$\vdash \overline{P \wedge R}$
(4)	$\overline{P} \vee Q$	Simp 1
(5)	U	Simp 1
(6)	$\overline{\overline{S} \to T}$	MP 3; 5
(7)	$\overline{S} \wedge \overline{T}$	Ne.Imp 6
(8)	$\overline{S}$	Simp 7
(9)	$\overline{R} \vee \overline{S}$	Add 8, Com
(10)	$\overline{R \wedge S}$	DM 9
(11)	$\overline{Q}$	MT 2; 10
(12)	$\overline{P}$	SD 4; 11
(13)	$\overline{P} \vee \overline{R}$	Add 12
(14)	$\overline{P \wedge R}$	DM 13

PS 8

(1)	$A \to B$	
(2)	$C \vee \overline{E}$	
(3)	$\overline{E} \to \overline{B \vee D}$	$\vdash \overline{A \wedge \overline{C}}$
(4)	$\overline{C} \to \overline{E}$	Imp 2
(5)	$\overline{C} \to \overline{B \vee D}$	SH 3; 4
(6)	$\overline{C} \to (\overline{B} \wedge \overline{D})$	DM 5
(7)	$(\overline{C} \to \overline{B}) \wedge (\overline{C} \to \overline{D})$	Dis 6
(8)	$\overline{C} \to \overline{B}$	Simp 7
(9)	$B \to C$	Cont 8
(10)	$A \to C$	SH 1; 9
(11)	$\overline{A \wedge \overline{C}}$	Ne.Imp 10

PS 9

(1)	$P \rightarrow R$	
(2)	$\overline{Q} \rightarrow S$	
(3)	$(S \wedge R) \rightarrow T$	
(4)	$\overline{T}$	$\vdash \overline{P} \vee Q$
(5)	$\overline{S \wedge R}$	MT 3; 4
(6)	$S \rightarrow \overline{R}$	Ne.Imp 5
(7)	$\overline{Q} \rightarrow \overline{R}$	SH 2; 6
(8)	$R \rightarrow Q$	Cont 7
(9)	$P \rightarrow Q$	SH 1; 8
(10)	$\overline{P} \vee Q$	Imp 9

PS 10

(1)	$\overline{B} \rightarrow \overline{A}$	
(2)	$(C \wedge D) \leftrightarrow A$	
(3)	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$\vdash F \rightarrow (C \rightarrow \overline{D})$
(4)	$A \rightarrow \overline{B}$	Imp 3
(5)	$A \rightarrow \overline{A}$	SH 1; 4
(6)	$\overline{A} \vee \overline{A}$	Imp 5
(7)	$\overline{A}$	Taut 6
(8)	$[(C \wedge D) \rightarrow A] \wedge [A \rightarrow (C \wedge D)]$	Equiv 2
(9)	$(C \wedge D) \rightarrow A$	Simpl 8
(10)	$\overline{C \wedge D}$	MT 7; 9
(11)	$C \rightarrow \overline{D}$	Ne.Imp 10
(12)	$\overline{F} \vee (C \rightarrow \overline{D})$	Add 11, Com
(13)	$F \rightarrow (C \rightarrow \overline{D})$	Imp 12

PS 11

(1)	$A \vee (B \wedge \overline{C})$	
(2)	$D \wedge C$	$\vdash E \rightarrow A$
(3)	C	Simp 2
(4)	$\overline{B} \vee C$	Add 3, Com
(5)	$\overline{B \wedge \overline{C}}$	DM 4
(6)	A	SD 1; 5
(7)	$\overline{E} \vee A$	Add 6, Com
(8)	$E \rightarrow A$	Imp 7

PS 12

(1)	$\overline{A} \rightarrow B$	
(2)	$C \rightarrow D$	
(3)	$(C \vee \overline{A}) \vee F$	
(4)	$F \rightarrow D$	
(5)	$\overline{D}$	$\vdash B$
(6)	$\overline{F}$	MT 4; 5
(7)	$\overline{A} \vee C$	SD 3; 6, Com
(8)	$A \rightarrow C$	Imp 7
(9)	$A \rightarrow D$	SH 2; 8
(10)	$\overline{A}$	MT 5; 9
(11)	B	MP 1; 10

PS 13

(1)	$A \rightarrow (B \wedge C)$	
(2)	$\overline{D} \vee (A \wedge E)$	
(3)	$C \rightarrow (B \rightarrow \overline{E})$	$\vdash \overline{D}$
(4)	$(B \wedge C) \rightarrow \overline{E}$	Exp 3, Com
(5)	$A \rightarrow \overline{E}$	SH 1; 4
(6)	$\overline{A \wedge E}$	Ne.Imp
(7)	$\overline{D}$	SD 2; 6

PS 14

(1)	$A \leftrightarrow B$	
(2)	$C \rightarrow (A \wedge \overline{B})$	
(3)	$(P \rightarrow \overline{Q}) \rightarrow \overline{D \rightarrow (E \rightarrow \overline{C})}$	$\vdash P \wedge Q$
(4)	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	Equiv 1
(5)	$A \rightarrow B$	Simp 4
(6)	$\overline{A \wedge \overline{B}}$	Ne.Imp 5
(7)	$\overline{C}$	MT 2; 6
(8)	$\overline{D \wedge E} \vee \overline{C}$	Add 7, Com
(9)	$(D \wedge E) \rightarrow \overline{C}$	Imp 8
(10)	$D \rightarrow (E \rightarrow \overline{C})$	Exp 9
(11)	$\overline{P \rightarrow \overline{Q}}$	MT 3; 10
(12)	$P \wedge Q$	Ne.Imp 11

PS 15

(1)	$\overline{\overline{D} \lor \overline{C}} \to (\overline{A} \to B)$	
(2)	$\overline{C \to A} \land D$	$\vdash$ $B \lor E$
(3)	$\overline{C \to A}$	Simp 2
(4)	D	Simp 2
(5)	$C \land \overline{A}$	Ne.Imp 3
(6)	C	Simp 5
(7)	$\overline{A}$	Simp 5
(8)	$D \land C$	Conj 4; 6
(9)	$\overline{\overline{D} \lor \overline{C}}$	DM 8
(10)	$\overline{A} \to B$	MP 1; 9
(11)	B	MP 7; 10
(12)	$B \lor E$	Add 11

PS 16

(1)	$A \leftrightarrow B$	
(2)	$B \to (C \land D)$	
(3)	$(D \lor E) \to F$	
(4)	$\overline{F}$	$\vdash$ $\overline{A \land C}$
(5)	$\overline{D \lor E}$	MT 3; 4
(6)	$\overline{D} \land \overline{E}$	DM 5
(7)	$\overline{D}$	Simp 6
(8)	$(B \to C) \land (B \to D)$	Dis 2
(9)	$B \to D$	Simp 8
(10)	$\overline{B}$	MT 7; 9
(11)	$(A \to B) \land (B \to A)$	Equiv 1
(12)	$A \to B$	Simp 11
(13)	$\overline{A}$	MT 10; 12
(14)	$\overline{A} \lor \overline{C}$	Add 13
(15)	$\overline{A \land C}$	DM 14

PS 17

(1)	$P \leftrightarrow Q$	
(2)	$R \rightarrow (P \wedge \overline{Q})$	
(3)	$(U \rightarrow \overline{V}) \rightarrow \overline{S \vee (T \rightarrow \overline{R})}$	$\vdash$ $U \wedge V$
(4)	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	Equiv 1
(5)	$P \rightarrow Q$	Simp 4
(6)	$\overline{P \wedge \overline{Q}}$	Ne.Imp 5
(7)	$\overline{R}$	MT 2; 6
(8)	$\overline{T} \vee \overline{R}$	Add 7, Com
(9)	$T \rightarrow \overline{R}$	Imp 8
(10)	$S \vee (T \rightarrow \overline{R})$	Add 9, Com
(11)	$\overline{U \rightarrow \overline{V}}$	MT 3; 10
(12)	$U \wedge V$	Ne.Imp 11

PS 18

(1)	$\overline{A \wedge B} \rightarrow (C \rightarrow \overline{D})$	
(2)	$\overline{D \rightarrow A} \vee \overline{B \vee \overline{D}}$	$\vdash$ $C \rightarrow E$
(3)	$(D \wedge \overline{A}) \vee \overline{B \vee \overline{D}}$	Ne.Imp 2
(4)	$(D \wedge \overline{A}) \vee (D \wedge \overline{B})$	DM 3, Com
(5)	$D \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$	Dis 4
(6)	D	Sim 5
(7)	$\overline{A} \vee \overline{B}$	Simp 5
(8)	$\overline{A \wedge B}$	DM 7
(9)	$C \rightarrow \overline{D}$	MP 1; 8
(10)	$\overline{C}$	MT 6; 9
(11)	$\overline{C} \vee E$	Add 10
(12)	$C \rightarrow E$	Imp 11

PS 19

(1)	$(A \rightarrow B) \land C$	
(2)	$B \rightarrow (D \rightarrow E)$	
(3)	$(\overline{C} \lor \overline{E}) \land (\overline{C} \lor \overline{F})$	$\vdash \overline{A} \lor \overline{D}$
(4)	$A \rightarrow B$	Simp 1
(5)	C	Simp 1
(6)	$\overline{C} \lor \overline{E}$	Simp 3
(7)	$\overline{E}$	SD 5; 6
(8)	$(B \land D) \rightarrow E$	Exp 2
(9)	$\overline{B \land D}$	MT 7; 8
(10)	$B \rightarrow \overline{D}$	Ne.Imp 9
(11)	$A \rightarrow \overline{D}$	SH 4; 10
(12)	$\overline{A} \lor \overline{D}$	Imp 11

PS 20

(1)	$P \rightarrow Q$	
(2)	$R \rightarrow S$	
(3)	$T \rightarrow (P \lor R)$	$\vdash T \rightarrow (Q \lor S)$
(4)	$T \rightarrow (\overline{P} \rightarrow R)$	Imp 3
(5)	$(T \land \overline{P}) \rightarrow R$	Exp 4
(6)	$(T \land \overline{P}) \rightarrow S$	SH 2; 5
(7)	$T \rightarrow (\overline{P} \rightarrow S)$	Exp 6
(8)	$T \rightarrow (\overline{S} \rightarrow P)$	Cont 7
(9)	$(T \land \overline{S}) \rightarrow P$	Exp 8
(10)	$(T \land \overline{S}) \rightarrow Q$	SH 1; 9
(11)	$T \rightarrow (\overline{S} \rightarrow Q)$	Exp 10
(12)	$T \rightarrow (\overline{Q} \rightarrow S)$	Cont 11
(13)	$T \rightarrow (Q \lor S)$	Imp 12

PS 21

(1)	$A \leftrightarrow (C \wedge B)$	
(2)	$C \wedge F$	
(3)	$\overline{B} \rightarrow (A \wedge C)$	$\vdash \overline{A} \rightarrow [(E \wedge G) \rightarrow D]$
(4)	C	Simp 2
(5)	$[A \rightarrow (C \wedge B)] \wedge [(C \wedge B) \rightarrow A]$	Equiv 1
(6)	$(C \wedge B) \rightarrow A$	Simp 5
(7)	$C \rightarrow (B \rightarrow A)$	Exp 6
(8)	$B \rightarrow A$	MP 4; 7
(9)	$(\overline{B} \rightarrow A) \wedge (\overline{B} \rightarrow C)$	Dis 3
(10)	$\overline{B} \rightarrow A$	Simp 9
(11)	$\overline{A} \rightarrow \overline{B}$	Cont 8
(12)	$\overline{A} \rightarrow A$	SH 10; 11
(13)	$A \vee A$	Imp 12
(14)	A	Taut 13
(15)	$A \vee [(E \wedge G) \rightarrow D]$	Add 14
(16)	$\overline{A} \rightarrow [(E \wedge G) \rightarrow D]$	Imp 15

PS 22

(1)	$\overline{P \leftrightarrow Q} \vee R$	
(2)	$\overline{P}$	
(3)	$\overline{\overline{P} \wedge Q}$	$\vdash R$
(4)	$\overline{P} \vee Q$	Add 2
(5)	$P \rightarrow Q$	Imp 4
(6)	$\overline{P} \rightarrow \overline{Q}$	Ne.Imp 3
(7)	$Q \rightarrow P$	Cont 6
(8)	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	Conj 5; 7
(9)	$P \leftrightarrow Q$	Equiv 8
(10)	R	SD 1; 9

PS 23

(1)	$(A \rightarrow B) \wedge C$	
(2)	$(D \rightarrow E) \vee \overline{B}$	
(3)	$C \rightarrow \overline{E \vee F}$	$\vdash A \rightarrow \overline{D}$
(4)	$A \rightarrow B$	Simp 1
(5)	C	Simp 1
(6)	$\overline{E \vee F}$	MP 3; 5
(7)	$\overline{E} \wedge \overline{F}$	DM 6
(8)	$\overline{E}$	Simp 7
(9)	$\overline{D \rightarrow E} \rightarrow \overline{B}$	Imp 2
(10)	$B \rightarrow (D \rightarrow E)$	Cont 9
(11)	$(B \wedge D) \rightarrow E$	Exp 10
(12)	$\overline{B \wedge D}$	MT 8; 11
(13)	$B \rightarrow \overline{D}$	Ne.Imp 12
(14)	$A \rightarrow \overline{D}$	SH 4; 13

PS 24

(1)	$P \vee \overline{Q}$	
(2)	$R \leftrightarrow Q$	
(3)	$\overline{S \wedge \overline{R}}$	
(4)	$\overline{T} \vee S$	$\vdash \overline{P} \rightarrow \overline{T}$
(5)	$(R \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$	Equiv 2
(6)	$R \rightarrow Q$	Simp 5
(7)	$S \rightarrow R$	Ne.Imp 3
(8)	$S \rightarrow Q$	SH 6; 7
(9)	$T \rightarrow S$	Imp 4
(10)	$T \rightarrow Q$	SH 8; 9
(11)	$\overline{P} \rightarrow \overline{Q}$	Imp 1
(12)	$Q \rightarrow P$	Cont 11
(13)	$T \rightarrow P$	SH 10; 12
(14)	$\overline{P} \rightarrow \overline{T}$	Cont 13

PS 25

(1)	$A \leftrightarrow B$	
(2)	$A \rightarrow (C \land D)$	
(3)	$(\overline{D} \rightarrow E) \rightarrow F$	
(4)	$\overline{F}$	$\vdash B \rightarrow \overline{C}$
(5)	$\overline{\overline{D} \rightarrow E}$	MT 3; 4
(6)	$\overline{D} \land \overline{E}$	Ne.Imp 5
(7)	$\overline{D}$	Simp 6
(8)	$(A \rightarrow C) \land (A \rightarrow D)$	Dis 2
(9)	$A \rightarrow D$	Simp 8
(10)	$\overline{A}$	MT 7; 9
(11)	$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$	Equiv 1
(12)	$B \rightarrow A$	Simp 11
(13)	$\overline{B}$	MT 10; 12
(14)	$\overline{B} \lor \overline{C}$	Add 13
(15)	$B \rightarrow \overline{C}$	Imp 14

PS 26

(1)	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{C} \lor D)$	
(2)	$E \leftrightarrow \overline{A}$	$\vdash E \rightarrow (\overline{D} \rightarrow \overline{C})$
(3)	$(E \rightarrow \overline{A}) \land (\overline{A} \rightarrow E)$	Equiv 2
(4)	$E \rightarrow \overline{A}$	Simp 3
(5)	$A \rightarrow \overline{E}$	Cont 4
(6)	$\overline{\overline{C} \lor D} \rightarrow \overline{A \rightarrow B}$	Cont 1
(7)	$(C \land \overline{D}) \rightarrow \overline{A \rightarrow B}$	DM 6
(8)	$(C \land \overline{D}) \rightarrow (A \land \overline{B})$	Ne.Imp 7
(9)	$[(C \land \overline{D}) \rightarrow A] \land [(C \land \overline{D}) \rightarrow \overline{B}]$	Dis 8
(10)	$(C \land \overline{D}) \rightarrow A$	Simp 9
(11)	$(C \land \overline{D}) \rightarrow \overline{E}$	SH 5; 10
(12)	$E \rightarrow \overline{C \land \overline{D}}$	Cont 11
(13)	$E \rightarrow (C \rightarrow D)$	Ne.Imp 12
(14)	$E \rightarrow (\overline{D} \rightarrow \overline{C})$	Cont 13

PS 27

(1)	$\overline{\overline{A} \to C}$	
(2)	$\overline{O} \to (B \wedge A)$	
(3)	$\overline{(D \to R) \vee \overline{\overline{E \vee \overline{O}}}}$	$\vdash$ $(E \vee R) \wedge O$
(4)	$\overline{A} \wedge \overline{C}$	Ne.Imp 1
(5)	$\overline{A}$	Simp 4
(6)	$\overline{D \to R} \wedge (E \vee \overline{O})$	DM 5
(7)	$E \vee \overline{O}$	Simp 6
(8)	$(\overline{O} \to B) \wedge (\overline{O} \to A)$	Dis 2
(9)	$\overline{O} \to A$	Simp 8
(10)	O	MT 5; 9
(11)	E	SD 7; 10
(12)	$E \vee R$	Add 11
(13)	$(E \vee R) \wedge O$	Conj 10; 12

PS 28

(1)	$(\overline{A} \to C) \to B$	
(2)	$\overline{D} \vee (B \to E)$	
(3)	$\overline{\overline{A} \vee E}$	
(4)	$C \to (D \wedge F)$	$\vdash$ $\overline{C}$
(5)	$A \wedge \overline{E}$	DM 3
(6)	A	Simp 5
(7)	$\overline{E}$	Simp 5
(8)	$A \vee C$	Add 6
(9)	$\overline{A} \to C$	Imp 8
(10)	B	MP 1; 9
(11)	$B \wedge \overline{E}$	Conj 7; 10
(12)	$\overline{B \to E}$	Ne.Imp 11
(13)	$\overline{D}$	SD 2; 12
(14)	$\overline{D} \vee \overline{F}$	Add 13
(15)	$\overline{D \wedge F}$	DM 14
(16)	$\overline{C}$	MT 4; 15

PS 29

(1)	$A \to B$	
(2)	$B \leftrightarrow \overline{A}$	
(3)	$B \to [(D \to E) \to A]$	$\vdash D \wedge \overline{E}$
(4)	$(B \to \overline{A}) \wedge (\overline{A} \to B)$	Equiv 2
(5)	$B \to \overline{A}$	Simp 4
(6)	$\overline{A} \to B$	Simp 4
(7)	$A \to \overline{A}$	SH 1; 5
(8)	$\overline{A} \vee \overline{A}$	Imp 7
(9)	$\overline{A}$	Taut 8
(10)	B	MP 6; 9
(11)	$(D \to E) \to A$	MP 3; 10
(12)	$\overline{D \to E}$	MT 9; 11
(13)	$D \wedge \overline{E}$	Ne.Imp 12

PS 30

(1)	$\overline{(A \to \overline{A}) \to \overline{C}}$	
(2)	$\overline{C \to D} \to \overline{A \to B}$	
(3)	$(D \wedge E) \to F$	$\vdash \overline{E} \vee F$
(4)	$(A \to \overline{A}) \wedge C$	Ne.Imp 1
(5)	$A \to \overline{A}$	Simp 4
(6)	C	Simp 4
(7)	$\overline{A} \vee \overline{A}$	Imp 5
(8)	$\overline{A}$	Taut 7
(9)	$\overline{A} \vee B$	Add 8
(10)	$A \to B$	Imp 9
(11)	$C \to D$	MT 2; 10
(12)	D	MP 6; 11
(13)	$D \to (E \to F)$	Exp 3
(14)	$E \to F$	MP 12; 13
(15)	$\overline{E} \vee F$	Imp 14

PS 31

(1)	$(A \rightarrow \overline{A}) \wedge B$	
(2)	$(A \rightarrow C) \rightarrow (D \rightarrow E)$	
(3)	$(E \wedge F) \rightarrow H$	
(4)	F	$\vdash E \rightarrow H$
(5)	$(F \wedge E) \rightarrow H$	Com 3
(6)	$F \rightarrow (E \rightarrow H)$	Exp 5
(7)	$E \rightarrow H$	MP 4; 6

PS 32

(1)	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow \overline{C}$	
(2)	$\overline{A \vee B}$	
(3)	$(C \wedge F) \vee E$	$\vdash E$
(4)	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	DM 2
(5)	$(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$	Add 4, Com
(6)	$A \leftrightarrow B$	Equiv 5
(7)	$\overline{C}$	MP 1; 6
(8)	$\overline{C} \vee \overline{F}$	Add 7
(9)	$\overline{C \wedge F}$	DM 8
(10)	E	SD 3; 9

PS 33

(1)	$A \leftrightarrow (C \wedge B)$	
(2)	$C \wedge F$	
(3)	$\overline{B} \rightarrow (A \wedge C)$	$\vdash \overline{A} \rightarrow [(H \wedge G) \rightarrow E]$
(4)	C	Simp 2
(5)	$[A \rightarrow (C \wedge B)] \wedge [(C \wedge B) \rightarrow A]$	Equiv 1
(6)	$(C \wedge B) \rightarrow A$	Simp 5
(7)	$C \rightarrow (B \rightarrow A)$	Exp 6
(8)	$B \rightarrow A$	MP 4; 7
(9)	$(\overline{B} \rightarrow A) \wedge (\overline{B} \rightarrow C)$	Dis 3
(10)	$\overline{B} \rightarrow A$	Simp 9
(11)	$\overline{A} \rightarrow B$	Cont 10
(12)	$\overline{A} \rightarrow A$	SH 8; 11
(13)	$A \vee A$	Imp 12
(14)	A	Taut 13
(15)	$A \vee [(H \wedge G) \rightarrow E]$	Add 14
(16)	$\overline{A} \rightarrow [(H \wedge G) \rightarrow E]$	Imp 15

PS 34

(1)	$\overline{S \rightarrow R}$	
(2)	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	
(3)	$\overline{S} \vee Q$	$\vdash \ \overline{P}$
(4)	$S \wedge \overline{R}$	Ne.Imp 1
(5)	S	Simp 4
(6)	$\overline{R}$	Simp 4
(7)	Q	SD 3; 5
(8)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	Exp 2
(9)	$Q \wedge \overline{R}$	Conj 6; 7
(10)	$\overline{Q \rightarrow R}$	Ne.Imp 9
(11)	$\overline{P}$	MT 8; 10

PS 35

(1)	$S \leftrightarrow P$	
(2)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	
(3)	$R \rightarrow \overline{R}$	$\vdash \ Q \rightarrow \overline{S}$
(4)	$\overline{R} \vee \overline{R}$	Imp 3
(5)	$\overline{R}$	Taut 4
(6)	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	Exp 2
(7)	$\overline{P \wedge Q}$	MT 5; 6
(8)	$P \rightarrow \overline{Q}$	Ne.Imp 7
(9)	$(S \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow S)$	Equiv 1
(10)	$S \rightarrow P$	Simp 9
(11)	$S \rightarrow \overline{Q}$	SH 8; 10
(12)	$Q \rightarrow \overline{S}$	Cont 11

PS 36

(1)	$A \rightarrow (B \wedge C)$	
(2)	$\overline{A} \rightarrow \overline{D \rightarrow E}$	
(3)	E	$\vdash \ B$
(4)	$\overline{D} \vee E$	Add 3, Com
(5)	$D \rightarrow E$	Imp 4
(6)	A	MT 2; 5
(7)	$B \wedge C$	MP 1; 6
(8)	B	Simp 7

PS 37

(1)	$\overline{A \to B} \to \overline{C}$	
(2)	$\overline{\overline{B} \to \overline{D}}$	
(3)	$(\overline{D} \to E) \to A$	
(4)	$E \to (C \wedge F)$	$\vdash \overline{E}$
(5)	$(E \to C) \wedge (E \to F)$	Dis 4
(6)	$E \to C$	Simp 5
(7)	$\overline{B} \wedge D$	Ne.Imp 2
(8)	$\overline{B}$	Simp 7
(9)	D	Simp 7
(10)	$D \vee E$	Add 9
(11)	$(D \vee E) \to A$	Imp 3
(12)	A	MP 10; 11
(13)	$A \wedge \overline{B}$	Conj 8; 12
(14)	$(A \wedge \overline{B}) \to \overline{C}$	Ne.Imp 1
(15)	$\overline{C}$	MP 13; 14
(16)	$\overline{E}$	MT 6; 15

PS 38

(1)	$F \leftrightarrow \overline{B}$	
(2)	$\overline{\overline{D} \vee E} \to (B \wedge \overline{C})$	$\vdash F \to (\overline{E} \to \overline{D})$
(3)	$(F \to \overline{B}) \wedge (\overline{B} \to F)$	Equiv 1
(4)	$F \to \overline{B}$	Simp 3
(5)	$[\overline{\overline{D} \vee E} \to B] \wedge [\overline{\overline{D} \vee E} \to \overline{C}]$	Dis 2
(6)	$\overline{\overline{D} \vee E} \to B$	Simp 5
(7)	$\overline{B} \to (\overline{D} \vee E)$	Cont 6
(8)	$F \to (\overline{D} \vee E)$	SH 4; 7
(9)	$F \to (E \vee \overline{D})$	Com 8
(10)	$F \to (\overline{E} \to \overline{D})$	Imp 9



3.5.2 Preuve conditionnelle

PC 1

(1)	$P \rightarrow [(\overline{Q} \vee R) \rightarrow S]$	
(2)	$[(\overline{P} \vee \overline{S}) \wedge (\overline{S} \rightarrow P)] \wedge (\overline{S} \vee P)$	$\vdash (R \rightarrow S) \rightarrow \overline{R}$
(3)	$R \rightarrow S$	Hyp PC
(4)	$(\overline{P} \vee \overline{S}) \wedge (\overline{S} \rightarrow P) \wedge (\overline{S} \vee P)$	Ass 2
(5)	$\overline{P} \vee \overline{S}$	Simp 4
(6)	$\overline{S} \rightarrow P$	Simp 4
(7)	$\overline{S} \vee P$	Simp 4
(8)	$P \rightarrow \overline{S}$	Imp 5
(9)	$S \rightarrow P$	Imp 7
(10)	$S \rightarrow \overline{S}$	SH 8; 9
(11)	$\overline{S} \vee \overline{S}$	Imp 10
(12)	$\overline{S}$	Taut 11
(13)	$\overline{R}$	MT 3; 12
(14)	$(R \rightarrow S) \rightarrow \overline{R}$	PC 3 – 13

PC 2

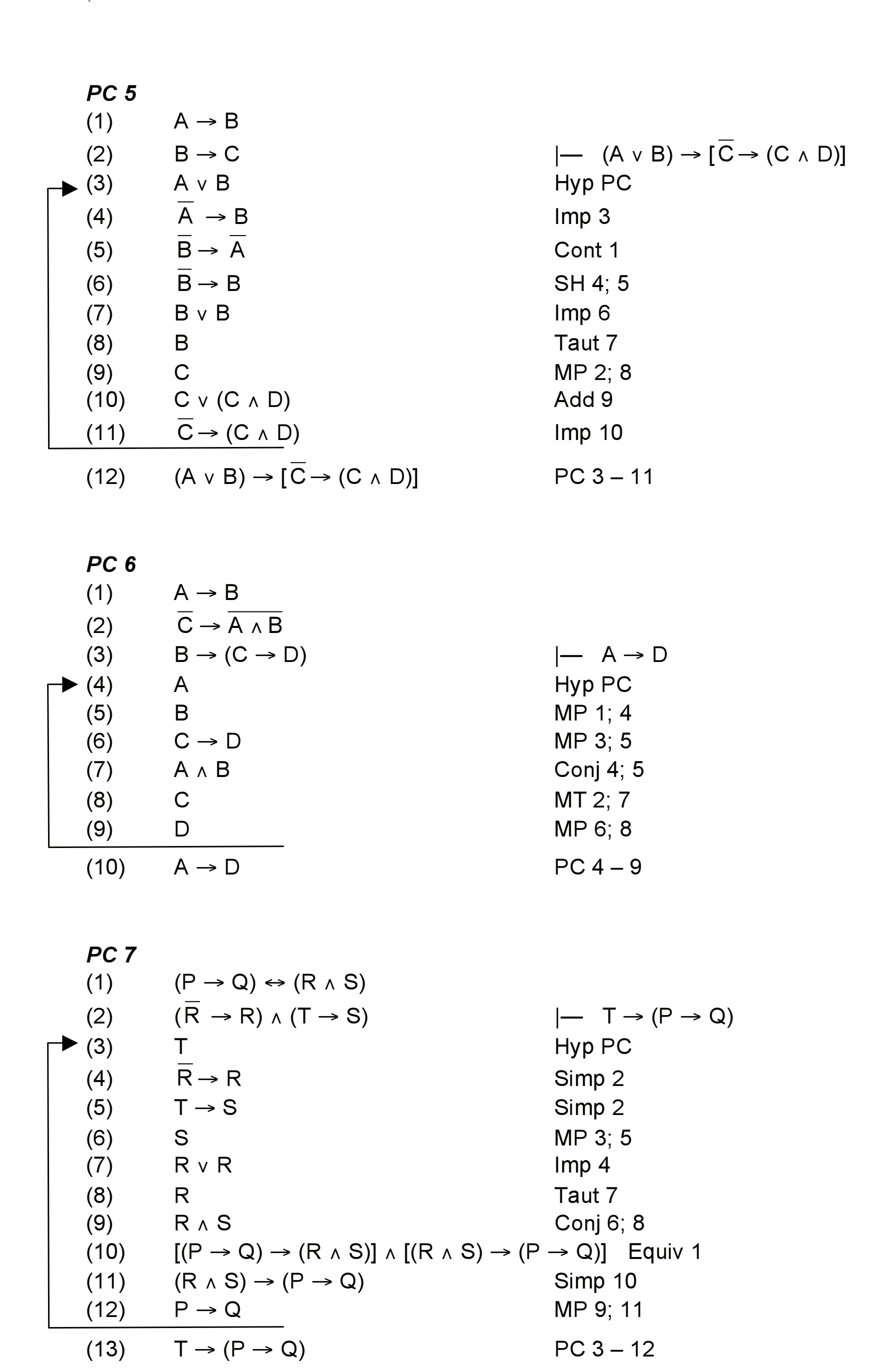
(1)	$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (R \wedge S)$	
(2)	$P \rightarrow Q$	$\vdash (\overline{P} \rightarrow \overline{Q}) \rightarrow (\overline{R} \rightarrow S)$
(3)	$\overline{P} \rightarrow \overline{Q}$	Hyp PC
(4)	$Q \rightarrow P$	Cont 3
(5)	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	Conj 2; 4
(6)	$P \leftrightarrow Q$	Equiv 5
(7)	$R \wedge S$	MP 1; 6
(8)	R	Simp 7
(9)	$R \vee S$	Add 8
(10)	$\overline{R} \rightarrow S$	Imp 9
(11)	$(\overline{P} \rightarrow \overline{Q}) \rightarrow (\overline{R} \rightarrow S)$	PC 3 – 10

PC 3

(1)	$(P \land Q) \to [R \to (S \leftrightarrow T)]$	
(2)	$(R \to P) \land Q$	$\vdash$ $(\overline{P} \to R) \to [(\overline{S \land T} \land \overline{\overline{S} \land \overline{T}}) \to \overline{R}]$
→ (3)	$\overline{P} \to R$	Hyp PC
(4)	$R \to P$	Simp 2
(5)	Q	Simp 2
(6)	$\overline{P} \to P$	SH 3; 4
(7)	$P \lor P$	Impl 6
(8)	P	Taut 7
(9)	$P \land Q$	Conj 5; 8
(10)	$R \to (S \leftrightarrow T)$	MP 1; 9
(11)	$\overline{S \leftrightarrow T} \to \overline{R}$	Cont 10
(12)	$\overline{(S \land T) \lor (\overline{S} \land \overline{T})} \to \overline{R}$	Equiv 11
(13)	$(\overline{S \land T} \land \overline{\overline{S} \land \overline{T}}) \to \overline{R}$	DM 12
(14)	$(\overline{P} \to R) \to [(\overline{S \land T} \land \overline{\overline{S} \land \overline{T}}) \to \overline{R}]$	PC 3 – 13

PC 4

(1)	$(P \lor Q) \to (R \leftrightarrow S)$	
(2)	$\overline{\overline{S} \land P}$	
(3)	$\overline{T} \to \overline{R}$	$\vdash$ $P \to (T \land R)$
→ (4)	P	Hyp PC
(5)	$\overline{S} \to \overline{P}$	Ne.Imp 2
(6)	$P \to S$	Cont 5
(7)	S	MP 4; 6
(8)	$P \lor Q$	Add 4
(9)	$R \leftrightarrow S$	MP 1; 8
(10)	$(R \to S) \land (S \to R)$	Equiv 9
(11)	$S \to R$	Simp 10
(12)	R	MP 7; 11
(13)	T	MT 3; 12
(14)	$T \land R$	Conj 12; 13
(15)	$P \to (T \land R)$	PC 4 – 14



PC 5

(1)	$A \rightarrow B$	
(2)	$B \rightarrow C$	$\vdash (A \vee B) \rightarrow [\overline{C} \rightarrow (C \wedge D)]$
(3)	$A \vee B$	Hyp PC
(4)	$\overline{A} \rightarrow B$	Imp 3
(5)	$\overline{B} \rightarrow \overline{A}$	Cont 1
(6)	$\overline{B} \rightarrow B$	SH 4; 5
(7)	$B \vee B$	Imp 6
(8)	B	Taut 7
(9)	C	MP 2; 8
(10)	$C \vee (C \wedge D)$	Add 9
(11)	$\overline{C} \rightarrow (C \wedge D)$	Imp 10
(12)	$(A \vee B) \rightarrow [\overline{C} \rightarrow (C \wedge D)]$	PC 3 – 11

PC 6

(1)	$A \rightarrow B$	
(2)	$\overline{C} \rightarrow \overline{A \wedge B}$	
(3)	$B \rightarrow (C \rightarrow D)$	$\vdash A \rightarrow D$
(4)	A	Hyp PC
(5)	B	MP 1; 4
(6)	$C \rightarrow D$	MP 3; 5
(7)	$A \wedge B$	Conj 4; 5
(8)	C	MT 2; 7
(9)	D	MP 6; 8
(10)	$A \rightarrow D$	PC 4 – 9

PC 7

(1)	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (R \wedge S)$	
(2)	$(\overline{R} \rightarrow R) \wedge (T \rightarrow S)$	$\vdash T \rightarrow (P \rightarrow Q)$
(3)	T	Hyp PC
(4)	$\overline{R} \rightarrow R$	Simp 2
(5)	$T \rightarrow S$	Simp 2
(6)	S	MP 3; 5
(7)	$R \vee R$	Imp 4
(8)	R	Taut 7
(9)	$R \wedge S$	Conj 6; 8
(10)	$[(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \wedge S)] \wedge [(R \wedge S) \rightarrow (P \rightarrow Q)]$	Equiv 1
(11)	$(R \wedge S) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	Simp 10
(12)	$P \rightarrow Q$	MP 9; 11
(13)	$T \rightarrow (P \rightarrow Q)$	PC 3 – 12

PC 8

(1)	$\overline{A \wedge B} \rightarrow \overline{C}$	
(2)	$B \leftrightarrow D$	
(3)	$A \rightarrow (\overline{E} \rightarrow F)$	$\vdash \overline{C} \vee [(E \vee F) \wedge D]$
		$\vdash_2 C \rightarrow [(E \vee F) \wedge D]$
(4)	C	Hyp PC
(5)	$A \wedge B$	MT 1; 4
(6)	A	Simp 5
(7)	B	Simp 5
(8)	$\overline{E} \rightarrow F$	MP 3; 6
(9)	$E \vee F$	Imp 8
(10)	$(B \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow B)$	Equiv 2
(11)	$B \rightarrow D$	Simp 10
(12)	D	MP 7; 11
(13)	$(E \vee F) \wedge D$	Conj 9; 12
(14)	$C \rightarrow [(E \vee F) \wedge D]$	PC 4 – 13
(15)	$\overline{C} \vee [(E \vee F) \wedge D]$	Imp 14

PC 9

(1)	$P \rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow S]$	
(2)	$(P \leftrightarrow \overline{S}) \wedge \overline{S \wedge \overline{P}}$	$\vdash (\overline{R} \rightarrow T) \rightarrow T$
(3)	$\overline{R} \rightarrow T$	Hyp PC
(4)	$P \leftrightarrow \overline{S}$	Simp 2
(5)	$\overline{S \wedge \overline{P}}$	Simp 2
(6)	$S \rightarrow P$	Ne.Imp 5
(7)	$(P \rightarrow \overline{S}) \wedge (\overline{S} \rightarrow P)$	Equiv 4
(8)	$P \rightarrow \overline{S}$	Simp 7
(9)	$S \rightarrow \overline{S}$	SH 6; 8
(10)	$\overline{S} \vee \overline{S}$	Imp 9
(11)	$\overline{S}$	Taut 10
(12)	$\overline{S} \rightarrow P$	Simp 7
(13)	P	MP 11; 12
(14)	$(Q \rightarrow R) \rightarrow S$	MP 1; 13
(15)	$\overline{Q \rightarrow R}$	MT 11; 14
(16)	$Q \wedge \overline{R}$	Ne.Imp 15
(17)	$\overline{R}$	Simp 16
(18)	T	MP 3; 17
(19)	$(\overline{R} \rightarrow T) \rightarrow T$	PC 3 – 18

PC 10

(1)	$(E \vee A) \rightarrow D$	
(2)	$B \leftrightarrow \overline{C}$	
(3)	$\overline{E} \rightarrow (B \rightarrow A)$	$\vdash \overline{D} \rightarrow C$
(4)	$\overline{D}$	Hyp PC
(5)	$\overline{E \vee A}$	MT 1; 4
(6)	$\overline{E} \wedge \overline{A}$	DM 5
(7)	$\overline{E}$	Simp 6
(8)	$\overline{A}$	Simp 6
(9)	$B \rightarrow A$	MP 3; 7
(10)	$\overline{B}$	MT 8; 9
(11)	$(B \rightarrow \overline{C}) \wedge (\overline{C} \rightarrow B)$	Equiv 2
(12)	$\overline{C} \rightarrow B$	Simp 11
(13)	C	MT 10; 12
(14)	$\overline{D} \rightarrow C$	PC 4 – 13

PC 11

(1)	$P \vee R$	$\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow [(S \rightarrow Q) \vee R]$
(2)	$P \rightarrow Q$	Hyp PC
(3)	$\overline{P} \rightarrow R$	Imp 1
(4)	$\overline{Q} \rightarrow \overline{P}$	Cont 2
(5)	$\overline{Q} \rightarrow R$	SH 3; 4
(6)	$Q \vee R$	Imp 5
(7)	$Q \vee R \vee \overline{S}$	Add 6
(8)	$(\overline{S} \vee Q) \vee R$	Com, Ass 7
(9)	$(S \rightarrow Q) \vee R$	Imp 8
(10)	$(P \rightarrow Q) \rightarrow [(S \rightarrow Q) \vee R]$	PC 2 – 9

PC 12

(1)	$P \leftrightarrow \overline{S}$	
(2)	$S \rightarrow P$	
(3)	$P \rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow S]$	$\vdash \overline{T} \rightarrow \overline{R \lor T}$
(4)	$\overline{T}$	Hyp PC
(5)	$(P \rightarrow \overline{S}) \land (\overline{S} \rightarrow P)$	Equiv 1
(6)	$P \rightarrow \overline{S}$	Simp 5
(7)	$\overline{S} \rightarrow P$	Simp 5
(8)	$S \rightarrow \overline{S}$	SH 2; 6
(9)	$\overline{S} \lor \overline{S}$	Imp 8
(10)	$\overline{S}$	Taut 9
(11)	$\overline{S} \rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow S]$	SH 3; 7
(12)	$(Q \rightarrow R) \rightarrow S$	MP 10; 11
(13)	$\overline{Q \rightarrow R}$	MT 10; 12
(14)	$Q \land \overline{R}$	Ne.Imp 13
(15)	$\overline{R}$	Simp 14
(16)	$\overline{R} \land \overline{T}$	Conj 4; 15
(17)	$\overline{R \lor T}$	DM 16
(18)	$\overline{T} \rightarrow \overline{R \lor T}$	PC 4 – 17

PC 13

(1)	$\overline{A} \lor (B \land C)$	$\vdash \overline{B \land C \land D} \rightarrow \overline{D \land A}$
		$\vdash 2 \ (D \land A) \rightarrow (B \land C \land D)$
(2)	$D \land A$	Hyp PC
(3)	D	Simp 2
(4)	A	Simp 2
(5)	$B \land C$	SD 1; 4
(6)	$B \land C \land D$	Conj 3; 5
(7)	$(D \land A) \rightarrow (B \land C \land D)$	PC 2 – 6
(8)	$\overline{B \land C \land D} \rightarrow \overline{D \land A}$	Cont 7

PC 14

(1)	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\overline{C} \vee D)$	
(2)	$\overline{A} \vee B$	$\vdash$ $[C \wedge (\overline{B} \vee A)] \rightarrow (\overline{D} \rightarrow E)$
(3)	$C \wedge (\overline{B} \vee A)$	Hyp PC
(4)	C	Simp 3
(5)	$\overline{B} \vee A$	Simp 3
(6)	$A \rightarrow B$	Imp 2
(7)	$B \rightarrow A$	Imp 5
(8)	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	Conj 6; 7
(9)	$A \leftrightarrow B$	Equiv 8
(10)	$\overline{C} \vee D$	MP 1; 9
(11)	D	SD 4; 10
(12)	$D \vee E$	Add 11
(13)	$\overline{D} \rightarrow E$	Imp 12
(14)	$[C \wedge (\overline{B} \vee A)] \rightarrow (\overline{D} \rightarrow E)$	PC 3 – 13

PC 15

(1)	$(P \vee Q) \rightarrow [(R \vee S) \rightarrow (T \wedge U)]$	
(2)	$(T \vee V) \rightarrow W$	$\vdash$ $(P \wedge R) \rightarrow W$
(3)	$P \wedge R$	Hyp PC
(4)	P	Simp 3
(5)	R	Simp 3
(6)	$P \vee Q$	Add 4
(7)	$(R \vee S) \rightarrow (T \wedge U)$	MP 1; 6
(8)	$R \vee S$	Add 5
(9)	$T \wedge U$	MP 7; 8
(10)	T	Simp 9
(11)	$T \vee U$	Add 10
(12)	W	MP 2; 11
(13)	$(P \wedge R) \rightarrow W$	PC 3 – 12

PC 16

(1)	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\overline{C} \vee D)$	
(2)	$A \rightarrow B$	$\vdash [\overline{C \rightarrow B} \vee (A \wedge C)] \rightarrow (C \wedge D)$
(3)	$\overline{C \rightarrow B} \vee (A \wedge C)$	Hyp PC
(4)	$(C \wedge \overline{B}) \vee (C \wedge A)$	Ne.Imp 3, Comm
(5)	$C \wedge (\overline{B} \vee A)$	Dis 4
(6)	C	Simp 5
(7)	$\overline{B} \vee A$	Simp 5
(8)	$B \rightarrow A$	Imp 7
(9)	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	Conj 2; 8
(10)	$A \leftrightarrow B$	Equiv 9
(11)	$\overline{C} \vee D$	MP 1; 10
(12)	D	SD 6; 11
(13)	$C \wedge D$	Conj 6; 12
(14)	$[\overline{C \rightarrow B} \vee (A \wedge C)] \rightarrow (C \wedge D)$	PC 3 – 13

PC 17

(1)	$Q \rightarrow (S \wedge \overline{P})$	
(2)	$R \leftrightarrow (T \rightarrow \overline{Q})$	$\vdash P \rightarrow R$
(3)	P	Hyp PC
(4)	$\overline{S} \vee P$	Add 3, Com
(5)	$\overline{S \wedge \overline{P}}$	DM 4
(6)	$\overline{Q}$	MT 1; 5
(7)	$[R \rightarrow (T \rightarrow \overline{Q})] \wedge [(T \rightarrow \overline{Q}) \rightarrow R]$	Equiv 2
(8)	$(T \rightarrow \overline{Q}) \rightarrow R$	Simp 7
(9)	$\overline{T} \vee \overline{Q}$	Add 6, Com
(10)	$T \rightarrow \overline{Q}$	Imp 9
(11)	R	MP 8; 10
(12)	$P \rightarrow R$	PC 3 – 11

PC 18

(1)	$A \rightarrow (B \wedge E)$	
(2)	$C \leftrightarrow B$	
(3)	$(E \wedge \overline{F}) \rightarrow D$	$\vdash A \rightarrow [C \wedge (\overline{D} \rightarrow F)]$
(4)	A	Hyp PC
(5)	$B \wedge E$	MP 1; 4
(6)	B	Simp 5
(7)	E	Simp 5
(8)	$(C \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$	Equiv 2
(9)	$B \rightarrow C$	Simp 8
(10)	C	MP 6; 9
(11)	$E \rightarrow (\overline{F} \rightarrow D)$	Exp 3
(12)	$\overline{F} \rightarrow D$	MP 7; 11
(13)	$\overline{D} \rightarrow F$	Cont 12
(14)	$C \wedge (\overline{D} \rightarrow F)$	Conj 10; 13
(15)	$A \rightarrow [C \wedge (\overline{D} \rightarrow F)]$	PC 4 – 14

PC 19

(1)	$\overline{P \wedge S} \rightarrow \overline{R}$	
(2)	$(S \wedge T) \vee (\overline{S} \wedge \overline{T})$	
(3)	$P \rightarrow (\overline{Q} \rightarrow U)$	$\vdash R \rightarrow [(Q \vee U) \wedge T]$
(4)	R	Hyp PC
(5)	$P \wedge S$	MT 1; 4
(6)	P	Simp 5
(7)	S	Simp 5
(8)	$\overline{Q} \rightarrow U$	MP 3; 6
(9)	$Q \vee U$	Imp 8
(10)	$S \leftrightarrow T$	Equiv 2
(11)	$(S \rightarrow T) \wedge (T \rightarrow S)$	Equiv 10
(12)	$S \rightarrow T$	Simp 11
(13)	T	MP 7; 12
(14)	$(Q \vee U) \wedge T$	Conj 9; 13
(15)	$R \rightarrow [(Q \vee U) \wedge T]$	PC 4 – 14

PC 20

(1)	$[(\overline{K} \vee \overline{P}) \wedge (\overline{P} \rightarrow K)] \wedge (\overline{P} \vee K)$	
(2)	$K \rightarrow [(\overline{L} \vee M) \rightarrow P]$	$\vdash (M \rightarrow P) \rightarrow \overline{M}$
(3)	$M \rightarrow P$	Hyp PC
(4)	$\overline{K} \vee \overline{P}$	Simp 1, Ass
(5)	$\overline{P} \vee K$	Simp 1, Ass
(6)	$K \rightarrow \overline{P}$	Imp 4
(7)	$P \rightarrow K$	Imp 5
(8)	$P \rightarrow \overline{P}$	SH 6; 7
(9)	$\overline{P} \vee \overline{P}$	Imp 8
(10)	$\overline{P}$	Taut 9
(11)	$\overline{M}$	MT 3; 10
(12)	$(M \rightarrow P) \rightarrow \overline{M}$	PC 3 – 11

PC 21

(1)	$\overline{A \wedge B} \vee [C \vee (D \wedge G)]$	
(2)	$\overline{B \rightarrow (A \rightarrow C)}$	$\vdash (\overline{E} \vee \overline{F}) \rightarrow (D \wedge G)$
(3)	$\overline{E} \vee \overline{F}$	Hyp PC
(4)	$\overline{(B \wedge A) \rightarrow C}$	Exp 2
(5)	$(B \wedge A) \wedge \overline{C}$	Ne.Imp 4
(6)	$A \wedge B$	Simp 5, Com
(7)	$\overline{C}$	Simp 5
(8)	$C \vee (D \wedge G)$	SD 1; 6
(9)	$D \wedge G$	SD 7; 8
(10)	$(\overline{E} \vee \overline{F}) \rightarrow (D \wedge G)$	PC 3 – 9

PC 22

(1)	$(C \vee D) \rightarrow F$	
(2)	$\overline{C} \rightarrow (\overline{D} \rightarrow B)$	
(3)	$A \rightarrow \overline{B}$	$\vdash \overline{B} \rightarrow F$
(4)	$\overline{B}$	Hyp PC
(5)	$(\overline{C} \wedge \overline{D}) \rightarrow B$	Exp 2
(6)	$\overline{\overline{C} \wedge \overline{D}}$	MT 4; 5
(7)	$C \vee D$	DM 6
(8)	F	MP 1; 7
(9)	$\overline{B} \rightarrow F$	PC 4 – 8

PC 23

(1)	$R \to P$	
(2)	$\overline{P} \vee Q$	
(3)	$U \to \overline{T}$	
(4)	$(\overline{T} \to R) \vee (\overline{T} \to Q)$	$\vdash$ $U \to Q$
		$\vdash$ 2 $\overline{Q} \to \overline{U}$
(5)	$\overline{Q}$	Hyp PC
(6)	$\overline{P}$	SD 2; 5
(7)	$\overline{R}$	MT 1; 6
(8)	$\overline{Q} \wedge \overline{R}$	Conj 5; 7
(9)	$\overline{Q \vee R}$	DM 8
(10)	$\overline{T} \to (Q \vee R)$	Dis 4, Com
(11)	T	MT 9; 10
(12)	$\overline{U}$	MT 3; 11
(13)	$\overline{Q} \to \overline{U}$	PC 5 – 12
(14)	$U \to Q$	Cont 13

PC 24

(1)	$A \leftrightarrow B$	
(2)	$(A \wedge B) \to C$	
(3)	$B \to (C \to D)$	$\vdash$ $A \to D$
(4)	A	Hyp PC
(5)	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	Equiv 1
(6)	$A \to B$	Simp 5
(7)	B	MP 4; 6
(8)	$A \wedge B$	Conj 4; 7
(9)	C	MP 2; 8
(10)	$B \wedge C$	Conj 7; 9
(11)	$(B \wedge C) \to D$	Exp 3
(12)	D	MP 10; 11
(13)	$A \to D$	PC 4 – 12

PC 25

(1)	$\overline{C} \vee (A \rightarrow \overline{B})$	
(2)	$\overline{D} \rightarrow (A \wedge C)$	
(3)	$\overline{E} \vee B$	$\vdash E \rightarrow D$
(4)	E	Hyp PC
(5)	B	SD 3; 4
(6)	$C \rightarrow (A \rightarrow \overline{B})$	Imp 1
(7)	$(C \wedge A) \rightarrow \overline{B}$	Exp 6
(8)	$\overline{A \wedge C}$	MT 5; 7, Com
(9)	D	MT 2; 8
(10)	$E \rightarrow D$	PC 4 – 9

PC 26

(1)	$(C \leftrightarrow D) \rightarrow (E \rightarrow F)$	
(2)	$\overline{C} \vee D$	$\vdash [(E \wedge \overline{D}) \vee (E \wedge C)] \rightarrow F$
(3)	$(E \wedge \overline{D}) \vee (E \wedge C)$	Hyp PC
(4)	$E \wedge (\overline{D} \vee C)$	Dis 3
(5)	$\overline{D} \vee C$	Simp 4
(6)	$C \rightarrow D$	Imp 2
(7)	$D \rightarrow C$	Imp 5
(8)	$(C \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow C)$	Conj 6; 7
(9)	$C \leftrightarrow D$	Equiv 8
(10)	$E \rightarrow F$	MP 1; 9
(11)	E	Simp 4
(12)	F	MP 10; 11
(13)	$[(E \wedge \overline{D}) \vee (E \wedge C)] \rightarrow F$	PC 3 – 12



RÉSOLUTIONS D'EXERCICES

3.5.3 Réduction à l'absurde

RA 1

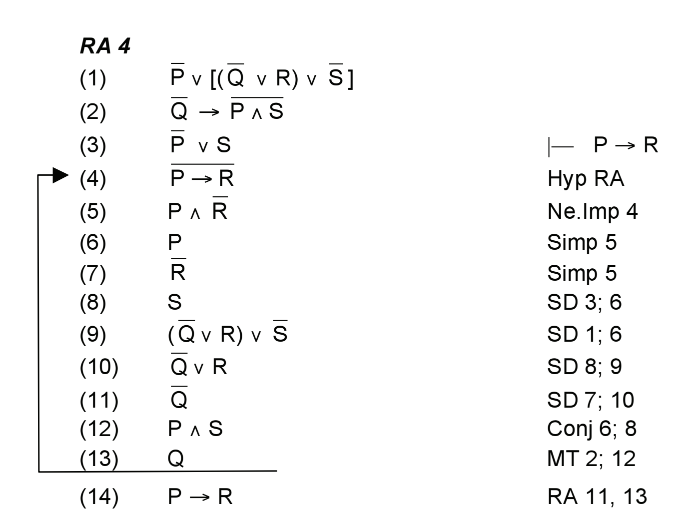
(1)	$(P \wedge K) \vee (P \wedge R)$	
(2)	$H \rightarrow \overline{H}$	
(3)	$(P \wedge S) \rightarrow \overline{Q \vee T}$	
(4)	$\overline{S} \rightarrow H$	$\vdash \overline{T}$
(5)	T	Hyp RA
(6)	$\overline{H} \vee \overline{H}$	Imp 2
(7)	$\overline{H}$	Taut 6
(8)	S	MT 4; 7
(9)	$P \wedge (K \vee R)$	Dis 1
(10)	P	Simp 9
(11)	$P \wedge S$	Conj 8; 10
(12)	$\overline{Q \vee T}$	MP 3; 11
(13)	$\overline{Q} \wedge \overline{T}$	DM 12
(14)	$\overline{T}$	Simp 13
(15)	$\overline{T}$	RA 5, 14

RA 2

(1)	$\overline{A} \vee [(\overline{B} \vee C) \vee \overline{D}]$	
(2)	$\overline{B} \rightarrow \overline{A \wedge D}$	
(3)	$\overline{A} \vee D$	$\vdash A \rightarrow C$
(4)	$\overline{A \rightarrow C}$	Hyp RA
(5)	$A \wedge \overline{C}$	Ne.Imp 4
(6)	A	Simp 5
(7)	$\overline{C}$	Simp 5
(8)	D	SD 3; 6
(9)	$(\overline{B} \vee C) \vee \overline{D}$	SD 1; 6
(10)	$\overline{B} \vee C$	SD 8; 9
(11)	$\overline{B}$	SD 7; 10
(12)	$\overline{A \wedge D}$	MP 2; 11
(13)	$\overline{A} \vee \overline{D}$	DM 12
(14)	$\overline{A}$	SD 8; 13
(15)	$A \rightarrow C$	RA 6, 14

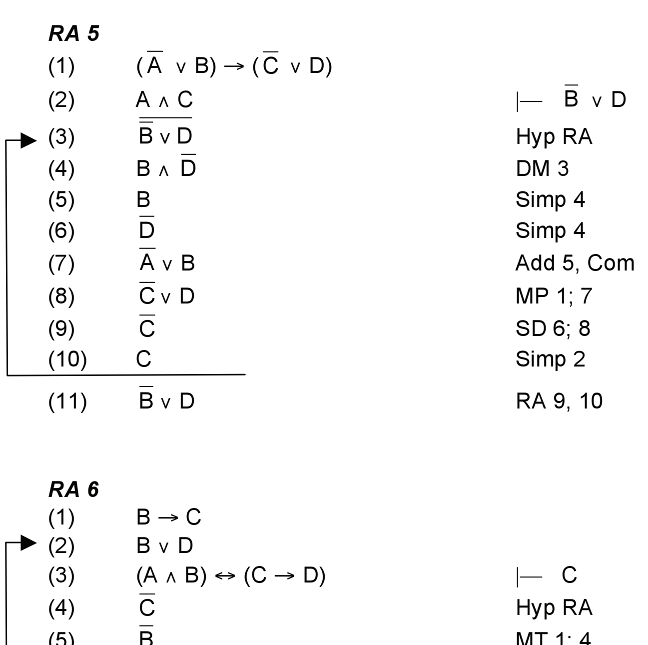
RA 3

(1)	$(A \lor B) \to (C \land D)$	
(2)	$\overline{A} \to (E \to \overline{E})$	
(3)	$\overline{C}$	$\vdash \overline{E}$
(4)	E	hyp RA
(5)	$\overline{A} \to (\overline{E} \lor \overline{E})$	Imp 2
(6)	$\overline{A} \to \overline{E}$	Taut 5
(7)	A	MT 6; 4
(8)	$A \lor B$	Add 7
(9)	$C \land D$	MP 1; 8
(10)	C	Simp 9
(11)	$\overline{E}$	RA 3, 10



RA 4

(1)	$\overline{P} \lor [(\overline{Q} \lor R) \lor \overline{S}]$	
(2)	$\overline{Q} \to \overline{P \land S}$	
(3)	$\overline{P} \lor S$	$\vdash P \to R$
(4)	$\overline{P \to R}$	Hyp RA
(5)	$P \land \overline{R}$	Ne.Imp 4
(6)	P	Simp 5
(7)	$\overline{R}$	Simp 5
(8)	S	SD 3; 6
(9)	$(\overline{Q} \lor R) \lor \overline{S}$	SD 1; 6
(10)	$\overline{Q} \lor R$	SD 8; 9
(11)	$\overline{Q}$	SD 7; 10
(12)	$P \land S$	Conj 6; 8
(13)	Q	MT 2; 12
(14)	$P \to R$	RA 11, 13



RA 5

(1)	$(\overline{A} \vee B) \rightarrow (\overline{C} \vee D)$	
(2)	$A \wedge C$	$\vdash \overline{B} \vee D$
(3)	$\overline{\overline{B} \vee D}$	Hyp RA
(4)	$B \wedge \overline{D}$	DM 3
(5)	B	Simp 4
(6)	$\overline{D}$	Simp 4
(7)	$\overline{A} \vee B$	Add 5, Com
(8)	$\overline{C} \vee D$	MP 1; 7
(9)	$\overline{C}$	SD 6; 8
(10)	C	Simp 2
(11)	$\overline{B} \vee D$	RA 9, 10

RA 6

(1)	$B \rightarrow C$	
(2)	$B \vee D$	
(3)	$(A \wedge B) \leftrightarrow (C \rightarrow D)$	$\vdash C$
(4)	$\overline{C}$	Hyp RA
(5)	$\overline{B}$	MT 1; 4
(6)	$[(A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow D)] \wedge [(C \rightarrow D) \rightarrow (A \wedge B)]$	Equiv 3
(7)	$(C \rightarrow D) \rightarrow (A \wedge B)$	Simp 6
(8)	$\overline{C} \vee D$	Add 4
(9)	$C \rightarrow D$	Impl 8
(10)	$A \wedge B$	MP 7; 9
(11)	B	Simp 10
(12)	C	RA 5, 11

RA 7

(1)	$\overline{B} \rightarrow \overline{A}$	
(2)	$(C \wedge D) \leftrightarrow A$	
(3)	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$\vdash C \rightarrow \overline{D}$
(4)	$\overline{C \rightarrow \overline{D}}$	Hyp RA
(5)	$C \wedge D$	Ne.Imp 4
(6)	$[(C \wedge D) \rightarrow A] \wedge [A \rightarrow (C \wedge D)]$	Equiv 2
(7)	$(C \wedge D) \rightarrow A$	Simp 6
(8)	A	MP 5; 7
(9)	$\overline{B}$	SD 3; 8
(10)	$\overline{A}$	MP 1; 9
(11)	$C \rightarrow \overline{D}$	RA 8, 10

RA 8

(1)	$[(A \rightarrow B) \wedge C] \rightarrow D$	
(2)	$A \rightarrow \bar{E}$	$\vdash$ $(C \rightarrow D) \vee \bar{E}$
(3)	$\overline{(C \rightarrow D) \vee \bar{E}}$	Hyp RA
(4)	$\overline{C \rightarrow D} \wedge E$	DM 3
(5)	$\overline{C \rightarrow D}$	Simp 4
(6)	E	Simp 4
(7)	$\bar{A}$	MT 2; 6
(8)	$(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)$	Exp 1
(9)	$\overline{A \rightarrow B}$	MT 5; 8
(10)	$A \wedge \bar{B}$	Ne.Imp 9
(11)	A	Simp 10
(12)	$(C \rightarrow D) \vee \bar{E}$	RA 7, 11

RA 9

(1)	$\overline{Q \vee \bar{R}} \vee (\bar{S} \rightarrow \bar{T})$	
(2)	$U \leftrightarrow \bar{R}$	$\vdash$ $(T \wedge \bar{S}) \rightarrow \bar{U}$
(3)	$\overline{(T \wedge \bar{S}) \rightarrow \bar{U}}$	Hyp RA
(4)	$T \wedge \bar{S} \wedge U$	Ne.Impl 3, Ass
(5)	T	Simp 4
(6)	$\bar{S}$	Simp 4
(7)	U	Simp 4
(8)	$(U \rightarrow \bar{R}) \wedge (\bar{R} \rightarrow U)$	Equiv 2
(9)	$U \rightarrow \bar{R}$	Simp 8
(10)	$\bar{R}$	MP 7; 9
(11)	$Q \vee \bar{R}$	Add 10, Com
(12)	$\bar{S} \rightarrow \bar{T}$	SD 1; 11
(13)	$\bar{T}$	MP 6; 12
(14)	$(T \wedge \bar{S}) \rightarrow \bar{U}$	RA 5; 13

RA 10

(1)	$A \leftrightarrow O$	
(2)	$A \rightarrow \overline{L}$	$\vdash$ $(O \wedge L) \rightarrow (L \rightarrow Y)$
(3)	$\overline{(O \wedge L) \rightarrow (L \rightarrow Y)}$	Hyp RA
(4)	$(O \wedge L) \wedge \overline{L \rightarrow Y}$	Ne.Imp 3
(5)	$O \wedge L$	Simp 4
(6)	O	Simp 5
(7)	$\overline{L \rightarrow Y}$	Simp 4
(8)	$L \wedge \overline{Y}$	Ne.Imp 7
(9)	L	Simp 8
(10)	$\overline{A}$	MT 2; 9
(11)	$(A \rightarrow O) \wedge (O \rightarrow A)$	Equiv 1
(12)	$O \rightarrow A$	Simp 11
(13)	A	MP 6; 12
(14)	$(O \wedge L) \rightarrow (L \rightarrow Y)$	RA 10, 13

RA 11

(1)	$(A \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow C)$	
(2)	$A \wedge B$	$\vdash$ $D \rightarrow C$
(3)	$\overline{D \rightarrow C}$	Hyp RA
(4)	$D \wedge \overline{C}$	Ne.Imp 3
(5)	D	Simp 4
(6)	$\overline{C}$	Simp 4
(7)	B	Simp 2
(8)	$B \wedge \overline{C}$	Conj 6; 7
(9)	$\overline{B \rightarrow C}$	Ne.Imp 8
(10)	$\overline{A \rightarrow D}$	MT 1; 9
(11)	$A \wedge \overline{D}$	Ne.Imp 10
(12)	$\overline{D}$	Simp 11
(13)	$D \rightarrow C$	RA 5, 12

RA 12

(1)	$\overline{K \rightarrow (L \rightarrow M)}$	$\vdash \overline{(K \rightarrow L) \rightarrow M}$
(2)	$(K \rightarrow L) \rightarrow M$	Hyp RA
(3)	$K \wedge \overline{L \rightarrow M}$	Ne.Imp 1
(4)	K	Simp 3
(5)	$\overline{L \rightarrow M}$	Simp 3
(6)	$L \wedge \overline{M}$	Ne.Imp 5
(7)	L	Simp 6
(8)	$\overline{M}$	Simp 6
(9)	$\overline{K \rightarrow L}$	MT 2; 8
(10)	$K \wedge \overline{L}$	Ne.Imp 9
(11)	$\overline{L}$	Simp 10
(12)	$\overline{(K \rightarrow L) \rightarrow M}$	RA 7, 11

RA 13

(1)	$(P \rightarrow S) \rightarrow (Q \rightarrow R)$	
(2)	$P \wedge Q$	$\vdash S \rightarrow R$
(3)	$\overline{S \rightarrow R}$	Hyp RA
(4)	$S \wedge \overline{R}$	Ne.Imp 3
(5)	S	Simp 4
(6)	$\overline{R}$	Simp 4
(7)	P	Simp 2
(8)	Q	Simp 2
(9)	$\overline{P} \vee S$	Add 5, Com
(10)	$P \rightarrow S$	Imp 9
(11)	$Q \rightarrow R$	MP 1; 10
(12)	R	MP 8; 11
(13)	$S \rightarrow R$	RA 6, 12

RA 14

(1)	$A \leftrightarrow B$	
(2)	$B \rightarrow \overline{C \wedge D}$	
(3)	$(\overline{D} \vee E) \rightarrow F$	
(4)	$\overline{F}$	$\vdash \overline{A \wedge C}$
(5)	$A \wedge C$	Hyp RA
(6)	A	Simp 5
(7)	C	Simp 5
(8)	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	Equiv 1
(9)	$A \rightarrow B$	Simp 8
(10)	B	MP 6; 9
(11)	$\overline{\overline{D} \vee E}$	MT 3; 4
(12)	$D \wedge \overline{E}$	DM 11
(13)	D	Simp 12
(14)	$C \wedge D$	Conj 7; 13
(15)	$\overline{B}$	MT 2; 14
(16)	$\overline{A \wedge C}$	RA 10; 15

RA 15

(1)	$P \vee (T \wedge K) \vee (T \wedge Q)$	$\vdash \overline{K \rightarrow P} \rightarrow T$
(2)	$\overline{\overline{K \rightarrow P} \rightarrow T}$	Hyp RA
(3)	$\overline{K \rightarrow P} \wedge \overline{T}$	Ne.Imp 2
(4)	$\overline{K \rightarrow P}$	Simp 3
(5)	$\overline{T}$	Simp 3
(6)	$K \wedge \overline{P}$	Ne.Imp 4
(7)	$\overline{P}$	Simp 6
(8)	$(T \wedge K) \vee (T \wedge Q)$	SD 1; 7, Ass
(9)	$T \wedge (K \vee Q)$	Dist 8
(10)	T	Simp 9
(11)	$\overline{K \rightarrow P} \rightarrow T$	RA 5, 10

RA 16

(1)	$\overline{\overline{P} \vee Q} \vee R$	$\vdash P \to (\overline{R} \to \overline{Q})$
(2)	$\overline{P \to (\overline{R} \to \overline{Q})}$	Hyp RA
(3)	$P \wedge \overline{\overline{R} \to \overline{Q}}$	Ne.Imp 2
(4)	P	Simp 3
(5)	$\overline{\overline{R} \to \overline{Q}}$	Simp 3
(6)	$\overline{R} \wedge Q$	Ne.Imp 5
(7)	$\overline{R}$	Simp 6
(8)	$\overline{\overline{P} \vee Q}$	SD 1; 7
(9)	$P \wedge \overline{Q}$	DM 8
(10)	Q	Simp 6
(11)	$\overline{Q}$	Simp 9
(12)	$P \to (\overline{R} \to \overline{Q})$	RA 10, 11

RA 17

(1)	$\overline{B \vee C} \vee (D \wedge E)$	
(2)	$\overline{B} \to (F \to \overline{F})$	
(3)	$\overline{D}$	$\vdash \overline{F}$
(4)	F	Hyp RA
(5)	$\overline{B} \to (\overline{F} \vee \overline{F})$	Imp 2
(6)	$\overline{B} \to \overline{F}$	Taut 5
(7)	B	MT 4; 6
(8)	$B \vee C$	Add 7
(9)	$D \wedge E$	SD 1; 8
(10)	D	Simp 9
(11)	$\overline{F}$	RA 3; 10

RA 18

(1)	$(R \rightarrow S) \rightarrow (A \rightarrow B)$	
(2)	$\overline{R} \leftrightarrow C$	$\vdash \; C \rightarrow (A \rightarrow B)$
(3)	$\overline{C \rightarrow (A \rightarrow B)}$	Hyp RA
(4)	$C \wedge \overline{A \rightarrow B}$	Ne.Imp 3
(5)	$\overline{A \rightarrow B}$	Simp 4
(6)	$\overline{R \rightarrow S}$	MT 1; 5
(7)	$R \wedge \overline{S}$	Ne.Imp 6
(8)	$(\overline{R} \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \overline{R})$	Equiv 2
(9)	$C \rightarrow \overline{R}$	Simp 8
(10)	C	Simp 4
(11)	$\overline{R}$	MP 9; 10
(12)	R	Simp 7
(13)	$C \rightarrow (A \rightarrow B)$	RA 11; 12



REGLES DE DEDUCTION et LOIS LOGIQUES

RD

1. Conjonction (Conj)

$p; q \quad \vdash \quad p \wedge q$

2. Simplification (Simp)

$p \wedge q \quad \vdash \quad p$

$p \wedge q \quad \vdash \quad q$

3. Addition (Add)

$p \quad \vdash \quad p \vee q$

4. Syllogisme disjonctif (SD)

$p \vee q; \overline{q} \quad \vdash \quad p$

$p \vee q; \overline{p} \quad \vdash \quad q$

5. Modus ponens (MP)

$p \rightarrow q; p \quad \vdash \quad q$

6. Modus tollens (MT)

$p \rightarrow q; \overline{q} \quad \vdash \quad \overline{p}$

7. Syllogisme hypothétique (SH)

$p \rightarrow q; q \rightarrow r \quad \vdash \quad p \rightarrow r$

LL

1. Double négation (DN)

$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$

2. Tautologie (Taut)

$p \vee p \Leftrightarrow p$

$p \wedge p \Leftrightarrow p$

3. Commutativité (Com)

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$

4. Associativité (Ass)

$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge q \wedge r$

$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

5. Distributivité (Dis)

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

$p \rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

$(p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

$(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

6. De Morgan (DM)

$p \vee q \Leftrightarrow \overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}$

$p \wedge q \Leftrightarrow \overline{\overline{p} \vee \overline{q}}$

7. Implication (Imp) / Imp.niée (Ne.Imp)

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$

$\overline{p \rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$

8. Contraposition (Cont)

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \overline{q} \rightarrow \overline{p}$

9. Equivalence (Equiv)

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$

10. Exportation (Exp)

$(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$

BIBLIOGRAPHIE

La présente bibliographie ne reprend que les ouvrages ayant servi de près ou de loin à l'élaboration du présent manuel. Elle ne constitue pas un outil de références pour le futur étudiant en logique.

ANONYME
Notions de logique formelle, Luxembourg, Ministère de l'Education Nationale et de la Jeunesse, 1986.

ARISTOTELES
Sophistische Widerlegungen (Organon VI), (trad. Rolfes), Hamburg, Felix Meiner Verlag, 1968.

APESS
Logique 1ère (Cahier pédagogique N° 7), Luxembourg, Editions de l'APESS, 1994.

ARNAULD & NICOLE
La logique ou l'art de penser (Logique de Port-Royal), Paris, Flammarion, 1978.

BLANCHÉ, R.
La logique et son histoire, Paris, Armand Colin, 1970.

BUCHER Th.
Einführung in die angewandte Logik, Berlin, de Gruyter, 1987.

BUFFON, B.
La parole persuasive, Paris, P.U.F., 2002.

COPY, I.M.Symbolic Logic, New York, Macmillan, 1973.

DIOGÈNE LAERCE
Vies, doctrines et sentences des philosophes illustres, (trad. Genaille), Paris, Garnier-Flammarion, 1965.

GEX, M.
Logique formelle, Neuchâtel, Ed. du Griffon, 1968.

JEFFREY, R.C.
Formal Logic, New York, Mc Graw-Hill, 1967.

KLEENE, S.C.
Logique mathématique, Paris, Armand Colin, 1971.

KOYRE, A.
Epimenide le Menteur, Paris, Hermann, 1947.

LEWIS CARROLL
Logique sans peine, Paris, Hermann, 1966.

MUTOMBO, M-P.
Eléments de logique classique, Louvain-la-Neuve, Bruylant-Academia, 2003.

POUNDSTONE, W.
Im Labyrinth des Denkens, Hamburg, Rowohlt Verlag, 2002.

SAINSBURY, R.M.
Paradoxien, Stuttgart, Reclam, 2001.

SCHOPENHAUER, A.
Die Kunst Recht zu behalten, Frankfurt am Main, Insel Verlag, 1995.

STUMPER, O.
Questions et Exercices de logique formelle, Luxembourg, V. Buck, 1959.

THIRY, Ph.
Notions de logique, Bruxelles, de Boeck, 2002.

VAX, L.
Logique, Paris, P.U.F., 1982.

VERNANT, D.
Introduction à la logique standard, Paris, Flammarion, 2001.

VOLLMER, G.
Paradoxien und Antinomien,
in Wissenschafts-theorie im Einsatz, Stuttgart, Hirzel, 1993.

VON FRITZ K.
Schriften zur griechischen Logik,
Stuttgart, Friedrich Frommann Verlag, 1978.

WEIS, E.
Logique moderne (fasc. 1 et 2), Luxembourg, Edi-Centre, 1972.

INDEX DES TERMES TECHNIQUES

TABLE DES MATIERES

